Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

Wintersemester 2007/08
9. April 2008

Nachklausur zur Linearen Algebra I

Name: ______________________ Vorname: ______________________

Matr.-Nr.: ______________________ Studiengang: ______________________

Für die Klausur sind **keine** Hilfsmittel erlaubt. Die Lösungen zum Definitions- und Aufgabenteil sind lesbar (!) auf separaten Blättern zu erstellen. Es gibt insgesamt 40 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 20 Punkte erreicht werden.

Einverständniserklärung: Hiermit willige ich ein, dass mein Klausurergebnis unter Angabe meiner Matrikelnummer auf der Vorlesungswebseite veröffentlicht wird.

Unterschrift: ....

Aufgabe	1	2	3	4	$\sum$	5	6	7	$\sum$
Punkte									

Definitionen

Geben Sie jeweils die vollständige Definition an. Dabei müssen alle Voraussetzungen formuliert werden; geben Sie z.B. zu jeder Variablen die Menge an, aus der sie stammt.

Aufgabe 1 (2+1+1 Punkte)
Definieren Sie die folgenden Begriffe:

a) injektive und surjektive Abbildung (der Begriff "Abbildung" muss nicht definiert werden)

b) Lineare Abbildung

c) Kern und Bild einer linearen Abbildung

Aufgabe 2 (1+1+1 Punkte)
Seien U, W Unterräume eines endlich dimensionalen K-Vektorraumes V.

a) Wie ist die "Summe von U und W" definiert?

b) Was bedeutet "V ist die direkte Summe von U und W"?

c) Geben Sie ein konkretes Beispiel eines Vektorraumes V und zwei Unterräumen U und W von V an, so dass V die direkte Summe von U und W ist (ohne Begründung!).

Aussagen

Für jedes richtige Kreuz erhalten Sie einen Pluspunkt, für jedes falsche Kreuz einen Minuspunkt. Es können jedoch keine negativen Gesamtpunktzahlen pro Aufgabe entstehen!

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

	ja	nein
(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z\} \subseteq \mathbb{R}^3$	○	○
(b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$	○	○
(c) $\{(\mu + \lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$	○	○
(d) $\{A \in M_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid A = A^T\} \subseteq M_{\mathbb{R}}(n \times n)$	○	○

Sei V ein K-Vektorraum und U, W Unterräume von V. $V \setminus U$ ist die Menge aller Vektoren, die in V, aber nicht in U liegen (bitte nicht mit dem Quotientenraum verwechseln!). Kreuzen Sie die korrekten Aussagen an:

(e) ○ $V \setminus U$ ist Unterraum von V ○ Ob $V \setminus U$ Unterraum von V ist, ist abhängig von U ○ $V \setminus U$ ist nie Unterraum von V

(f) ○ $U \cup W$ ist immer ein Unterraum von V ○ Es gibt Fälle, in denen $U \cup W$ ein Unterraum von V ist ○ $U \cup W$ ist nie Unterraum von V

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

Sei A eine 6×3-Matrix über $\mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^6$.

	wahr	falsch
(a) Ist $\mathrm{rg}A = \mathrm{rg}(A\|b) = 3$, so hat das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eine eindeutige Lösung.	○	○
(b) Das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist immer lösbar.	○	○
(c) Hat das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mindestens zwei Lösungen, so hat es auch unendlich viele weitere Lösungen.	○	○

Es sei nun A eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K und $b \in K^n$. Welche der folgenden Bedingungen ist (oder sind) gleichbedeutend mit der eindeutigen Lösbarkeit von $Ax = b$:

(d) ○ $\dim \mathrm{Kern}\, A = 0$ ○ $\dim \mathrm{Kern}\, A = n$ ○ $\mathrm{rg}A = n$

A sei wiederum eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K und $b \in K^n$. Sei $\det A = 0$. Dann ist das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$

(e) ○ nur lösbar für $b = 0$ ○ lösbar für alle $b \in K^n$, aber nicht unbedingt eindeutig ○ lösbar nur für manche $b \in K^n$, aber nie eindeutig

Aufgaben

Die Rechnungen und Beweise sind (wie üblich) auszuformulieren. Alles ist zu begründen und alle benutzten Symbole sind zu erklären.

Aufgabe 5 (3+3 Punkte)
Eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$,
d.h. $F(x) = A \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

a) Es seien $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix})$ und $\mathcal{B}' = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix})$ Basen vom $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$.

   Bestimmen Sie $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$.

b) Für die Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ aus (a) sei die lineare Abbildung G gegeben durch $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   Bestimmen Sie $G(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix})$.

Aufgabe 6 (2+2+2 Punkte)

a) Sei A eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K mit der Eigenschaft $A^2 = E_n$ (E_n bezeichne die Einheitsmatrix!)

   Welche Werte kann $\det A$ annehmen? (mit Beweis)

b) Für welche $r \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} r \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

c) Zeigen Sie: $\det \begin{pmatrix} a & a^4 & a^7 \\ a^2 & a^5 & a^8 \\ a^3 & a^6 & a^9 \end{pmatrix} = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden!!

Aufgabe 7 (2+1+1+2+1+2 Punkte)
Sei $M_{\mathbb{R}}(2,2)$ der Vektorraum der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$. Definiere die Spur einer Matrix durch $\mathrm{Sp}(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}) = a_{11} + a_{22}$.

a) Zeigen Sie, dass Sp eine lineare Abbildung von $M_{\mathbb{R}}(2,2)$ nach $\mathbb{R}$ ist.

b) Zeigen Sie: $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$ für alle $A, B \in M_{\mathbb{R}}(2,2)$.

c) Seien A, B ähnliche Matrizen in $M_{\mathbb{R}}(2,2)$. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$ gilt.

d) Sei $\mathcal{A} = \{(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\}$ die kanonische Basis von $M_{\mathbb{R}}(2,2)$ und $\mathcal{B} = \{1\}$ Basis von $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{Sp})$.

e) Bestimmen Sie die Dimension von Im Sp und geben Sie eine Basis von Im Sp an.

f) Bestimmen Sie die Dimension von Kern Sp und geben Sie eine Basis von Kern Sp an.