Technische Universität Berlin **Wintersemester 2007/08**
Institut für Mathematik 9. April 2008
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

Lösungsskizzen zur Nachklausur zur Linearen Algebra I

Definitionen

Aufgabe 1 (2+1+1 Punkte)
Definieren Sie die folgenden Begriffe:

a) injektive und surjektive Abbildung (der Begriff "Abbildung" muss nicht definiert werden):

Seien X, Y Mengen und $f : X \to Y$ eine Abbildung.

f heißt injektiv gdw. für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt: $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.
f heißt surjektiv gdw. zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ existiert mit $f(x) = y$.

b) Lineare Abbildung:

Seien V, W Vektorräume über einem Körper K. Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt lineare Abbildung, falls für alle $v, v' \in V$ und $\lambda \in K$ gilt:

$f(v + v') = f(v) + f(v')$ und $f(\lambda v) = \lambda f(v)$.

c) Kern und Bild einer linearen Abbildung:

Sei $f : V \to W$ lineare Abbildung. Dann ist

Kern $f = \{v \in V \mid f(v) = 0\}$ und Im $f = \{f(v) \mid v \in V\}$.

Aufgabe 2 (1+1+1 Punkte)
Seien U, W Unterräume eines endlich dimensionalen K-Vektorraumes V.

a) Wie ist die "Summe von U und W" definiert?:

$U + W = \{u + w \mid u \in U, w \in W\}$.

b) Was bedeutet "V ist die direkte Summe von U und W"?

V ist direkte Summe aus U und W, falls $V = U + W$ und $U \cap W = \{0\}$.

c) Geben Sie ein konkretes Beispiel eines Vektorraumes V und zwei Unterräumen U und W von V an, so dass V die direkte Summe von U und W ist (ohne Begründung!):

$V = \mathbb{R}^2$. $U = \{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\}$ und $W = \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}$.

Aussagen

Aufgabe 3 (6 Punkte)
Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

	ja	nein
(a) $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = y = 2z\} \subseteq \mathbb{R}^3$	⊗	○
(b) $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^4 = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$	⊗	○
(c) $\{(\mu+\lambda, \lambda^2) \in \mathbb{R}^2 \mid \mu, \lambda \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2$	○	⊗
(d) $\{A \in M_{\mathbb{R}}(n \times n) \mid A = A^T\} \subseteq M_{\mathbb{R}}(n \times n)$	⊗	○

Sei V ein K-Vektorraum und U, W Unterräume von V. $V \setminus U$ ist die Menge aller Vektoren, die in V, aber nicht in U liegen (bitte nicht mit dem Quotientenraum verwechseln!). Kreuzen Sie die korrekten Aussagen an:

(e) ○ $V \setminus U$ ist Unterraum von V ○ Ob $V \setminus U$ Unterraum von V ist, ist abhängig von U ⊗ $V \setminus U$ ist nie Unterraum von V

(f) ○ $U \cup W$ ist immer ein Unterraum von V ⊗ Es gibt Fälle, in denen $U \cup W$ ein Unterraum von V ist ○ $U \cup W$ ist nie Unterraum von V

Aufgabe 4 (6 Punkte)
Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen wahr oder falsch sind:

Sei A eine 6×3-Matrix über $\mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}^6$.

	wahr	falsch
(a) Ist $\text{rg}A = \text{rg}(A\|b) = 3$, so hat das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ eine eindeutige Lösung.	⊗	○
(b) Das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ ist immer lösbar.	○	⊗
(c) Hat das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mindestens zwei Lösungen, so hat es auch unendlich viele weitere Lösungen.	⊗	○

Es sei nun A eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K und $b \in K^n$. Welche der folgenden Bedingungen ist (oder sind) gleichbedeutend mit der eindeutigen Lösbarkeit von $Ax = b$:

(d) ⊗ $\dim \text{Kern } A = 0$ ○ $\dim \text{Kern } A = n$ ⊗ $\text{rg}A = n$

A sei wiederum eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K und $b \in K^n$. Sei $\det A = 0$. Dann ist das Lineare Gleichungssystem $Ax = b$

(e) ○ nur lösbar für $b = 0$ ○ lösbar für alle $b \in K^n$, aber nicht unbedingt eindeutig ⊗ lösbar nur für manche $b \in K^n$, aber nie eindeutig

Aufgaben

Aufgabe 5 (3+3 Punkte)
Eine lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ sei definiert durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, d.h. $F(x) = A \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$.

a) Es seien $\mathcal{B} = (\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix})$ und $\mathcal{B}' = (\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix})$ Basen vom $\mathbb{R}^3$ bzw. $\mathbb{R}^2$.

Bestimmen Sie $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F)$.

Bilder der Basisvektoren:

$$F(\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \tfrac{5}{3} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$F(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$F(\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix} = 10 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - 6 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Also ist $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(F) = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 10 \\ -\frac{5}{3} & 1 & -6 \end{pmatrix}$

b) Für die Basen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}'$ aus (a) sei die lineare Abbildung G gegeben durch $M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}'}(G) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Bestimmen Sie $G(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix})$.

Es ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

$$G(\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 6 (2+2+2 Punkte)

a) Sei A eine $n \times n$-Matrix über einem Körper K mit der Eigenschaft $A^2 = E_n$ (E_n bezeichne die Einheitsmatrix!)

Welche Werte kann $\det A$ annehmen? (mit Beweis)

$1 = \det E_n = \det A^2 = (\det A)^2$, da det multiplikativ ist. Daraus folgt $\det A = \pm 1$.

b) Für welche $r \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\begin{pmatrix} r \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ r \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig?

Die Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn $\det \begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 \\ 1 & 1 & r \end{pmatrix} \neq 0$ ist.

$\det\begin{pmatrix} r & 1 & 1 \\ 1 & r & 1 \\ 1 & 1 & r \end{pmatrix} \neq 0 = (1-r)^2(2+r)$, also sind die Vektoren unabhängig für alle $r \in \mathbb{R} \setminus \{1, -2\}$.

c) Zeigen Sie: $\det\begin{pmatrix} a & a^4 & a^7 \\ a^2 & a^5 & a^8 \\ a^3 & a^6 & a^9 \end{pmatrix} = 0$ für alle $a \in \mathbb{R}$.

Verwendet man z.B. die Regel von Sarrus um die Determinante zu berechnen, dann bekommt man das gewünschte Ergebnis für alle $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 7 (2+1+1+2+1+2 Punkte)

Sei $M_{\mathbb{R}}(2,2)$ der Vektorraum der 2×2-Matrizen über $\mathbb{R}$. Definiere die Spur einer Matrix durch $\mathrm{Sp}(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}) = a_{11} + a_{22}$.

a) Zeigen Sie, dass Sp eine lineare Abbildung von $M_{\mathbb{R}}(2,2)$ nach $\mathbb{R}$ ist.

Es ist

$\mathrm{Sp}(\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}) = \mathrm{Sp}(\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} \end{pmatrix}) = \lambda a_{11} + \lambda a_{22} = \lambda \mathrm{Sp}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$ und

$\mathrm{Sp}(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}) = \mathrm{Sp}(\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{pmatrix})$

$= a_{11}+b_{11}+a_{22}+b_{22} = a_{11}+a_{22}+b_{11}+b_{22} = \mathrm{Sp}(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix})+\mathrm{Sp}(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix})$.

b) Zeigen Sie: $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$ für alle $A, B \in M_{\mathbb{R}}(2,2)$.

Es ist

$\mathrm{Sp}(\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}b_{ji} = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} b_{ij}a_{ji} =$

$= \mathrm{Sp}(\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix})$

c) Seien A, B ähnliche Matrizen in $M_{\mathbb{R}}(2,2)$. Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(B)$ gilt.

Sei S invertierbare 2×2-Matrix mit $A = SBS^{-1}$. Dann ist wegen b) $\mathrm{Sp}A = \mathrm{Sp}(SBS^{-1}) = \mathrm{Sp}(BS^{-1}S) = \mathrm{Sp}(BE_2) = \mathrm{Sp}(B)$.

d) Sei $\mathcal{A} = \{(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix})\}$ die kanonische Basis von $M_{\mathbb{R}}(2,2)$ und $\mathcal{B} = \{1\}$ Basis von $\mathbb{R}$. Bestimmen Sie $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{Sp})$.

Bilder der Basisvektoren:

$\mathrm{Sp}(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 1$

$\mathrm{Sp}(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}) = 0$

$\mathrm{Sp}(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}) = 0$

$\mathrm{Sp}(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}) = 1.$

Also ist $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{Sp}) = (1\ 0\ 0\ 1)$.

e) Bestimmen Sie die Dimension von Im Sp und geben Sie eine Basis von Im Sp an.

$\dim \mathrm{Im\ Sp} = \mathrm{rg} M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(\mathrm{Sp}) = 1$. Damit ist $\{1\}$ eine Basis von Im Sp.

f) Bestimmen Sie die Dimension von Kern Sp und geben Sie eine Basis von Kern Sp an.

Dimensionsformel anwenden ergibt:

$4 = \dim M_{\mathbb{R}}(2,2) = \dim \mathrm{Im\ Sp} + \dim \mathrm{Kern\ Sp}$. Also ist $\dim \mathrm{Kern\ Sp} = 3$.

Eine Basis von Kern Sp ist $\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$.