Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 6-1
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS07/LinAlg1/

Wintersemester 2007/08
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

1. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra I

Abgabetermin: Am Fr, 26.10.07 **vor Beginn** der Vorlesung.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1
In dieser Aufgabe werden einige Grundlagen der Logik besprochen, die im „täglichen mathematischen Leben“ äußerst nützlich sind.

Wir bezeichnen dazu mit großen Buchstaben Aussagen, z.B. $A =$ „In Berlin ist das Wetter immer schön.“ oder $B =$ „$1 = 1$.“ Aussagen können mit den folgenden Operationen verknüpft werden (und das Ergebnis ist wieder eine Aussage – unabhängig davon, ob die Aussagen richtig oder falsch sind):

i) $A \vee B$ = „A oder B“ (= „A oder B (oder beide) sind wahr“).

ii) $A \wedge B$ = „A und B“ (= „sowohl A als auch B sind wahr“).

iii) $\neg A$ = „nicht A“ (= „A ist nicht wahr“).

iv) $A \Rightarrow B$ = „A *impliziert* B“, (= „falls A wahr ist, ist auch B wahr“ = „B folgt aus A“).

v) $A \Leftrightarrow B$:= $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, (= „$A$ ist *äquivalent* zu B“, wenn B aus A folgt und A aus B folgt).

Die Operation „$\neg$“ hat dabei Vorrang vor allen anderen Operationen (z.B. $(\neg A) \vee B = \neg A \vee B \neq \neg(A \vee B)$). Die Operationen „$\vee$“ und „$\wedge$“ haben Vorrang vor „$\Rightarrow$“ und „$\Leftrightarrow$“.

Üblicherweise werden diese Verknüpfungen durch sogenannte *Wahrheitstafeln* veranschaulicht. Hier zwei Beispiele; dabei steht „w“ für „wahr“ und „f“ für „falsch“.

A	B	$A \wedge B$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f

Tafel für $A \wedge B$

A	B	$A \Rightarrow B$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	w

Tafel für $A \Rightarrow B$

Zeigen Sie nun (z.B. mit Hilfe von Wahrheitstafeln oder mit Hilfe bereits gezeigter Aussagen), dass die folgenden Aussagen wahr sind.

a) $(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad \neg(A \wedge \neg B)$.
(Üblicherweise wird die *Implikation* durch die rechte Seite dieser Formel definiert.)

b) $\neg(A \vee B) \quad \Leftrightarrow \quad ((\neg A) \wedge (\neg B))$.
(Dies ist eine der sogenannten „de Morgan'schen Regeln".)

c) $\neg(A \wedge B) \quad \Leftrightarrow \quad ((\neg A) \vee (\neg B))$.
(Dies ist die andere de Morgan'sche Regel.)

Ein Weg ist, für die Aussagen je eine Wahrheitstafel für die linke Seite und eine Wahrheitstafel für die rechte Seite aufzustellen. Dann wird überprüft, ob diese gleich sind. Warum kann man das machen?

Aufgabe 2
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Injektivität und Surjektivität:

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f(x, y) := (3x - y, 3x + y)$, $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $g(x, y) := x^2 - y^2 + 1$.

Aufgabe 3
Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum\limits_{i=1}^{n} i \cdot 2^i = (n-1)2^{n+1} + 2$.

b) $7^n - 1$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ durch 6 teilbar.

c) Es existiert eine natürliche Zahl $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $2^n \geq n^2$ für alle $n \geq n_0$.

Übungsaufgaben

Aufgabe 1
Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und $X \neq \emptyset$. Beweisen Sie:

a) f ist injektiv genau dann, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ existiert mit $g \circ f = id_X$.

b) f ist surjektiv genau dann, wenn eine Abbildung $g : Y \to X$ existiert mit $f \circ g = id_Y$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie durch vollständige Induktion:

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$.

b) Ist X eine endliche Menge mit $|X| = n$, so ist $|\mathcal{P}(X)| = 2^n$.

c) $\frac{2n}{3} + \frac{n^2}{4} - \frac{n^3}{6} + \frac{n^4}{4}$ ist für alle $n \in \mathbb{N}$ eine ganze Zahl.

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Zeigen Sie analog zu Aufgabe 1 in den Tutoriumsvorschlägen:

a) $(A \wedge B) \vee C \quad \Leftrightarrow \quad ((A \vee C) \wedge (B \vee C))$.
(Diese Regel kann als „Distributivgesetz“ aufgefasst werden.)

b) $(A \Rightarrow B) \quad \Leftrightarrow \quad (\neg B \Rightarrow \neg A)$.
(Diese Aussage liegt dem Beweis durch *Kontraposition* zugrunde. Wir wollen $A \Rightarrow B$ zeigen. Es wird $\neg B$ angenommen und gezeigt, dass daraus folgt, dass $\neg A$ gilt. Dann verwendet man b) um zu schließen, dass dann auch B aus A folgt.)

c) $((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C)) \quad \Rightarrow \quad (A \Rightarrow C)$.
(Dies ist die Grundlage für längere Beweise. Wir nehmen Grundtatsachen an (ein Axiom oder einen Satz) und folgern daraus eine andere Tatsache. Hieraus wird wieder eine andere Tatsache gefolgert, usw. Dann schließen wir mit c), dass die letzte Tatsache auch aus den Grundtatsachen folgt.)

d) $((A \Leftrightarrow B) \wedge (B \Leftrightarrow C)) \quad \Leftrightarrow \quad ((A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow C) \wedge (C \Rightarrow A))$.
(Dies ist ein sehr nützliches Verfahren, um Äquivalenzen zu zeigen. Es muss nicht die Äquivalenz jeder Aussage zu jeder Aussage gezeigt werden, sondern „nur“ Implikationen „im Kreis“.)

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Zeigen Sie durch vollständige Induktion: Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $\sum\limits_{k=1}^{n} k^3 = (\sum\limits_{k=1}^{n} k)^2$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Betrachten Sie die Abbildungen

$f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $f(m) = (m-1, 2)$ und $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ mit $g((m,n)) = m + n$. Untersuchen Sie $f, g, f \circ g, g \circ f$ auf Injektivität, Surjektivität und Bijektivität.

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Seien $g : A \to B$ und $f : B \to C$ Abbildungen. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

a) Ist $f \circ g$ injektiv, so ist g injektiv.

b) Ist $f \circ g$ injektiv, so ist f injektiv.

c) Ist $f \circ g$ bijektiv, so ist g injektiv und f surjektiv.

d) Ist g surjektiv und f bijektiv, so ist $f \circ g$ bijektiv.