Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 6-1
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS07/LinAlg1/`

Wintersemester 2007/08
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

5. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra I

Abgabetermin: Am Fr, den 23. November 2007 **vor Beginn** der Vorlesung.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1
Sei $(G, +)$ eine Gruppe mit neutralem Element 0 und der Eigenschaft $x + x = 0$ für alle $x \in G$. Sei K der Körper $\mathbb{Z}_2$. Definiere auf G eine Skalarmultiplikation durch: $\cdot : \mathbb{Z}_2 \times G \to G$ mit $[0] \cdot x = 0$ und $[1] \cdot x = x$ für alle $x \in G$.

Zeigen Sie, dass G dadurch zu einem Vektorraum über $\mathbb{Z}_2$ wird.

Aufgabe 2

a) Wie sehen die Unterräume von $\mathbb{R}^3$ geometrisch aus?

b) Sei $v \in \mathbb{R}^2$ und $v \neq 0$. Was ist $\operatorname{span}(v)$ geometrisch gesehen?

c) Seien $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^3$. Was ist $\operatorname{span}(v_1, v_2)$ geometrisch gesehen?

d) Geben Sie Unterräume W_1, W_2, W_3 von $\mathbb{R}^2$ an, so dass $W_i \cap W_j = \{0\}$ und $\operatorname{span}(W_i \cup W_j) = \mathbb{R}^2$ für $i \neq j$.

Aufgabe 3

a) Welche der folgenden Teilmengen vom $\mathbb{R}^3$ sind Unterräume?

   i) $U_1 = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 1\}$
   ii) $U_2 = \{(x, y, z) \mid x + y = z\}$
   iii) $U_3 = \{(x, y, z) \mid x = y = z\}$

b) Welche der folgenden Teilmengen von $\operatorname{Abb}([0, 1], \mathbb{R})$ sind Unterräume?

   i) $U_1 = \{f \in \operatorname{Abb}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$
   ii) $U_2 = \{f \in \operatorname{Abb}([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(x) \leq f(y) \text{ für } x \leq y\}$

Aufgabe 4

a) Seien $w = (5, 2, 3), v_1 = (1, 0, 1), v_2 = (0, 1, 3), v_3 = (2, 0, 0)$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Zeigen oder wiederlegen Sie: $w \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3)$

b) Gleiche Aufgabe wie (a), wobei v_1, v_2 wie in (a), $v_3 = (2, 1, 5), w = (2, -3, 0)$

c) Sei $V = \mathbb{R}[t]$. Zeigen oder wiederlegen Sie: $t^2 + 4t - 3 \in \operatorname{span}_{\mathbb{R}}(t^2 - 2t + 5, 2t^2 - 3t, t + 3)$

Aufgabe 5
Welche der folgenden Familien von Vektoren sind linear unabhängig?

a) $((0, 1, 0), (1, 2, 0), (3, 2, 1))$ in $\mathbb{R}^3$

b) $((1, 1), (2, 1), (3, 0))$ in $\mathbb{R}^2$

c) $(\exp, \sin, \cos)$ in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, wobei exp die Exponentialfunktion, sin die Sinusfunktion und cos die Kosinusfunktion bezeichnet.

d) $((t-1)^2, (t+2)^2, (t+1)(t+2))$ in $\mathbb{R}[t]$

Übungsaufgaben

Aufgabe 1
Sei V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie:

a) Sind U_i $(i \in I)$ Unterräume von V, dann ist auch $\bigcap_{i \in I} U_i$ ein Unterraum von V.

b) Sind U_1, U_2 Unterräume von V, dann gilt:
$U_1 \cup U_2$ ist genau dann ein Unterraum von V, wenn $U_1 \subseteq U_2$ oder $U_2 \subseteq U_1$.

c) Sind U, W Unterräume von V, dann ist $\mathrm{span}(U \cup W) = \{u + w |\ u \in U, w \in W\}$.

Aufgabe 2
Sei $\exp_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $\exp_n(x) = e^{nx}$. Zeigen Sie: $(\exp_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine unendliche linear unabhängige Familie von Vektoren in $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Aufgabe 3
Sei V ein K-Vektorraum und sei $1 + 1 \neq 0$ in K.

Zeigen Sie: Für alle Vektoren $v_1, v_2 \in V$ gilt:
(v_1, v_2) ist genau dann linear unabhängig, falls $(v_1 + v_2, v_1 - v_2)$ linear unabhängig ist.

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Entscheiden Sie, ob die folgenden Teilmengen M der angegebenen $\mathbb{R}$-Vektorräume V Unterräume von V sind (mit Begründung).

a) $V = \mathbb{R}^3$, $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in V \mid x_2 = 2x_3,\ x_1 = 3\}$

b) $V = \mathbb{R}^2$, $M = \{(x_1, x_2) \in V \mid x_1^2 + x_2^2 = 0\}$

c) $V = \mathbb{R}^4$, $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in V \mid x_1 = x_2, x_3 = 2x_4\}$

d) $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $M = \{f \in V \mid f$ ist beschränkt $\}$. Dabei heißt f beschränkt, falls es ein $s \in \mathbb{R}$ gibt mit $|f(x)| \leq s$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

e) $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, $M = \{f \in V \mid f(x) \in \mathbb{Q}$ für alle $x \in \mathbb{R}\}$

Was passiert in b), wenn man $K = \mathbb{C}$ und $V = \mathbb{C}^2$ betrachtet?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

a) Sei $V = \mathbb{R}^3$ und seien $v_1 = (1, 1, 1), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (0, 1, -1)$ aus V.
Zeigen Sie: $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3) = \mathbb{R}^3$

b) Sei $V = \mathbb{R}[t]$ und seien $v_1 = (1-t)^3, v_2 = (1-t)^2, v_3 = 1 - t, v_4 = 1$ aus V.
Zeigen Sie: $\mathrm{span}_{\mathbb{R}}(v_1, v_2, v_3)$ ist gleich dem Unterraum aller Polynome vom Grad höchstens drei.

c) Betrachten Sie $\mathbb{C}$ als Vektorraum über dem Körper $\mathbb{R}$.
Zeigen Sie: $\operatorname{span}_{\mathbb{R}}(2+3i, 1-2i) = \mathbb{C}$.

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Geben Sie fünf Vektoren im $\mathbb{R}^4$ an, von denen je vier linear unabhängig sind.

b) $v_1, v_2, \ldots, v_n$ seien Vektoren im K-Vektorraum V. Zeigen Sie: $(v_1, v_2, \ldots, v_n)$ ist genau dann linear unabhängig, wenn $(v_1, v_1+v_2, v_1+v_2+v_3, \ldots, v_1+v_2+\ldots+v_n)$ linear unabhängig ist.

Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe: 4 Zusatzpunkte)

Sei V ein K-Vektorraum und $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren aus V.

Sei $M = \{W \mid W \text{ ist Unterraum von } V \text{ und } v_i \in W \text{ für alle } i \in I\}$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{span}(v_i)_{i\in I} = \bigcap_{W\in M} W$$