Technische Universität Berlin
Fakultät II, Institut für Mathematik
Sekretariat MA 6-1
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS07/LinAlg1/`

Wintersemester 2007/08
Prof. Dr. Stefan Felsner
Andrea Hoffkamp

7. Übungsblatt zur Vorlesung Lineare Algebra I

Abgabetermin: Am Fr, den 7.12.2007 **vor Beginn** der Vorlesung.

Tutoriumsvorschläge

Aufgabe 1
Sei $V = \mathbb{R}^5$. Bestimmen Sie eine Basis von

$$\operatorname{span}_{\mathbb{R}}((0,0,0,1,2),(1,1,-2,1,0),(0,-1,2,1,-1),(1,0,0,2,-1))$$

durch elementare Zeilenumformungen.

Aufgabe 2
Seien V, W Vektoräume über einem Körper K und $F : V \to W$ ein Isomorphismus.

a) Zeigen Sie, dass auch die Umkehrabbildung $F^{-1} : W \to V$ ein Isomorphismus ist.

b) Sei $(w_1, \ldots, w_n)$ eine Basis von W. Finden Sie eine Basis von V.

Aufgabe 3
Seien U_1 und U_2 Unterräume eines K-Vektorraumes V. Dabei gelte $\dim U_1 = 3$, $\dim U_2 = 5$ und $\dim V = 7$. Welche Dimension kann $U_1 \cap U_2$ bzw. $U_1 + U_2$ besitzen?

Aufgabe 4
Untersuchen Sie die folgenden Abbildungen auf Linearität:

a) $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_1(x, y) = (3x + 2y, x)$

b) $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = ax + b$

c) $f_3 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f_3(x, y) = x + \sqrt{2}$

d) $f_4 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f_4(z) = \overline{z}$ ($\mathbb{C}$ als $\mathbb{C}$-Vektorraum)

e) $f_5 : \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mit $f_5(g) = g(1)$

f) $f_6 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f_6(z) = \overline{z}$ ($\mathbb{C}$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum)

Übungsaufgaben

Aufgabe 1

a) Sei V ein K-Vektorraum und U, W Unterräume von V. Zeigen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen

   i) $V = U \oplus W$

   ii) Jedes $v \in V$ hat eine eindeutige Darstellung als $v = u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$.

   iii) $V = U + W$ und zwei von Null verschiedene Vektoren $u \in U$ und $w \in W$ sind linear unabhängig.

b) Sei $V = M(n \times n, \mathbb{R})$ der Vektorraum der quadratischen $(n \times n)$-Matrizen über $\mathbb{R}$.

Sei $A = (a_{ij})_{i,j=1,\ldots,n} \in V$. Dann definieren wir die *transponierte Matrix zu* A durch $A^t = (a_{ji})_{i,j=1,\ldots,n}$.

Sei $U = \{A \in V \mid A^t = A\}$ (symmetrische Matrizen) und $W = \{A \in V \mid A^t = -A\}$ (schiefsymmetrische Matrizen).

Zeigen Sie: $V = U \oplus W$.

Weiterhin beschäftigen wir uns in der großen Übung mit linearen Abbildungen und deren Eigenschaften.

Hausaufgaben

Aufgabe 1 (4 Punkte)

a) Bringen Sie folgende Matrizen über $\mathbb{R}$ auf Zeilenstufenform:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 2 & -6 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 11 & -5 & 3 \\ 2 & -5 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

b) Seien $a_1, a_2, \ldots, a_m \in K^n$ gegeben. Sei A die Matrix, die die Vektoren $a_1, \ldots, a_m$ als Zeilen hat. B sei in Zeilenstufenform und gehe aus A durch elementare Zeilenumformungen hervor.

i) Wie liest man aus B ab, dass $(a_1, \ldots, a_m)$ den K^n erzeugt.

ii) Wie liest man aus B ab, dass $(a_1, \ldots, a_m)$ linear unabhängig ist?

Aufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $V = \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ der Vektorraum der Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$. Sei U der Unterraum der geraden Funktionen und W sei der Unterraum der ungeraden Funktionen.

Zur Erinnerung: $f \in V$ heisst gerade, falls $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und f heisst ungerade, falls $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie: $V = U \oplus W$.

(Hinweis: Dass U und W Unterräume sind, muss nicht gezeigt werden. Falls Sie noch einen weiteren Hinweis haben wollen, so finden Sie diesen auf der Vorlesungswebseite.)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

a) Sei V ein K-Vektorraum und $F_i : K^3 \to K^3$, $i = 1, 2, 3$ Abbildungen. Untersuchen Sie die Abbildungen auf Linearität.
(i) $F_1(x, y, z) = (2z, x, 3y)$ (ii) $F_2(x, y, z) = (x + 1, 2y, z)$ (iii) $F_3(x, y, z) = (x \cdot y, 3x, z)$

b) Sei $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ der Raum der reellen Zahlenfolgen. Untersuchen Sie folgende Abbildungen $f, g : V \to V$auf Linearität und zusätzlich auf Injektivität und Surjektivität.
(i) $f(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (a_1, a_2, \ldots)$ (ii) $g(a_0, a_1, a_2, \ldots) = (0, a_0, a_1, a_2, \ldots)$.

Aufgabe 4 (Zusatzaufgabe: 4 Zusatzpunkte)
Sei K ein Körper und seien $v_1, \ldots, v_k \in K^n$ und $w_1, \ldots, w_k \in K^m$. Für jedes $i = 1, \ldots, k$ bilde den Vektor $(v_i|w_i) \in K^{n+m}$ durch hintereinander schreiben der Vektoren v_i und w_i.

Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig, so ist auch $((v_1|w_1), \ldots, (v_k|w_k))$ linear unabhängig.

b) Ist $(v_1, \ldots, v_k)$ linear abhängig, so ist auch $((v_1|w_1), \ldots, (v_k|w_k))$ linear abhängig.

c) Ist $((v_1|w_1), \ldots, (v_k|w_k))$ linear unabhängig, so ist auch $(v_1, \ldots, v_k)$ linear unabhängig.

d) Ist $((v_1|w_1), \ldots, (v_k|w_k))$ linear abhängig, so ist auch $(v_1, \ldots, v_k)$ linear abhängig.

Versuchen Sie sich beim Beweis der einzelnen Teilaufgaben möglichst kurz zu fassen!