Technische Universität Berlin WS 2007/08
Fakultät II - Mathematik und Naturwissenschaften 18.10.2007
Institut für Mathematik

StRiH. A. Gündel-vom Hofe

1. Übungsblatt zur „Zahlentheorie (LS)“

(Abgabe der Hausaufgaben: ausnahmsweise Do., 25.10.07 in der VL)

Aufgabe 1 ***Ü***

In der Vorlesung wurde gezeigt, daß aus dem Prinzip der vollständigen Induktion in $\boldsymbol{N}$ das Wohlordnungsprinzip folgt. Beweisen Sie nun Satz 1.3 aus dem Skript.

(*Tipp:* Ist $A \subseteq \boldsymbol{N}$ eine Menge mit (I.A.) $1 \in A$ sowie (I.S.) $\forall n \in \boldsymbol{N}: \; n \in A \Rightarrow n+1 \in A$, dann zeige man für $C = \boldsymbol{N} \setminus A$ mittels des Wohlordnungsprinzips: $C = \emptyset$.)

Aufgabe 2 ***Ü***

Durch Anwendung des Binomischen Lehrsatzes leite man mittels Auswertung der Teleskop-summe $\sum_{k=0}^{n}\left[(k+1)^3 - k^3\right]$ eine geschlossene Formel für die Summe $\sum_{k=1}^{n} k^2$ her und verifiziere diese anschließend mittels vollständiger Induktion.

Aufgabe 3 ***Ü***

Ausgehend vom Binomischen Lehrsatz leite man unter Anwendung der Analysis (Differential- und Integralrechnung) folgende Identitäten für die Binomialkoeffizienten her:

a) $\binom{n}{1} + 2\cdot\binom{n}{2} + 3\cdot\binom{n}{3} + \ldots + n\cdot\binom{n}{n} = n\cdot 2^{n-1}$.

b) $1\cdot 2\cdot\binom{n}{2} + 2\cdot 3\cdot\binom{n}{3} + \ldots + (n-1)\cdot n\cdot\binom{n}{n} = n\cdot(n-1)\cdot 2^{n-2}$.

c) $1 + \frac{1}{2}\cdot\binom{n}{1} + \frac{1}{3}\cdot\binom{n}{2} + \ldots + \frac{1}{n+1}\cdot\binom{n}{n} = \frac{2^{n+1}-1}{n+1}$.

d) $\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \ldots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}$.

(*Tipp zu (d):* Man betrachte die (Polynom-)Identität $(1+x)^{2n} = (1+x)^n \cdot (1+x)^n$. Wie lautet jeweils der Koeffizient zu x^n ?)

Aufgabe 4 ***H*** **10 Punkte**

a) Ausgehend von der Betrachtung der Dreiecks- und Viereckszahlen (s. Vorlesung bzw. Übung) betrachte man die Folge der *Fünfeckszahlen* $f_n : 1 , 5 , 12 , 22 , 35 , \ldots$. Hierbei gilt insbesondere: $f_{n+1} - f_n = 3n + 1$ ($n \in \boldsymbol{N}$). Leiten Sie eine Summendarstellung sowie eine geschlossene summenfreie Darstellung für die Fünfeckszahlen f_n her.

b) Finden Sie für die allgemeine *Polygonalzahlenfolge* (p_n), bezogen auf ein a-Eck ($a \in \boldsymbol{N}$, $a \geq 6$), mit $p_1 = 1$ und $p_{n+1} - p_n = (a-2) \cdot n + 1$ ($n \in \boldsymbol{N}$) eine entsprechende Summendarstellung und leiten Sie die dazugehörige summenfreie Form her.

Aufgabe 5 ***H*** **10 Punkte**

Unter Verwendung des Prinzips der vollständigen Induktion beweise man, daß für sämtliche natürliche Zahlen $n \in \boldsymbol{N_0}$ und alle reellen Zahlen $q \in \boldsymbol{R}$, $q \neq 1$ gilt:

a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\, q^{k-1} = 1 + 2q + 3q^2 + \ldots + n\, q^{n-1} = \frac{1-(n+1)\, q^n + n\, q^{n+1}}{(1-q)^2}$.

b) $\displaystyle\prod_{k=0}^{n} \left(1 + q^{2^k}\right) = (1+q) \cdot \left(1+q^2\right) \cdot \ldots \cdot \left(1 + q^{2^n}\right) = \frac{1-q^{2^{n+1}}}{1-q}$.

Kriterien für den Erwerb des Übungsscheines:

Der Erwerb des (unbenoteten) Übungsscheines ist abhängig von

a) der erfolgreichen Bearbeitung der Hausaufgaben (mind. 50 % der Gesamtpunkte),
b) der regelmäßigen Teilnahme an der Übung incl. Präsentation mindestens einer Ü-Aufgabe,
c) das Bestehen der Semesterabschlussklausur.

Jedes Übungsblatt besteht durchschnittlich aus ca. 5 bis 6 Aufgaben, getrennt nach *Haus*- und *Übungsaufgaben*:

1. Die *Hausaufgaben* sind jeweils schriftlich zu lösen und zum angegebenen Termin abzugeben. Hinsichtlich der Abgabe ist die *Einzelabgabe* vorgesehen.
2. Die Lösungen der *Übungsaufgaben* sind jeweils zur Übung in der Woche nach Ausgabe des Aufgabenblattes vorzubereiten und mitzubringen. Sie sollen dann dort von einzelnen Übungsteilnehmern vorgestellt werden.

Eine Hausaufgabe gilt als *erfolgreich* bearbeitet, wenn mindestens *8 Punkte*, als zumindest *teilweise erfolgreich* bearbeitet, wenn *5* bis *7 Punkte* erreicht wurden.

Termin und Ort für die *Semesterabschlussklausur* ist ***Samstag, 16.02.2008, 9:00 – 13:00 Uhr, MA 001*** . Eine Benotung der Klausur findet nicht statt; es geht nur um Bestehen bzw. Nichtbestehen. Gemäß dem Muster der Aufgabenklausuren im Staatsexamen werden mehrere Aufgaben gestellt, die jeweils mit 10 Punkten bewertet sind und von denen die Hälfte überwiegend „vollständig“ bearbeitet – d.h. hier mit *mindestens 8 Punkten* bewertet – sein sollten. Hilfsmittel sind zur Klausur nicht zugelassen. Voraussetzung für die Teilnahme an der Klausur ist die erfolgreiche Bearbeitung der Hausaufgaben sowie regelmäßige Teilnahme an den Übungen.

ACHTUNG: Verlegung des Übungstermins!!!

Ab kommender Woche findet die ***Übung zur „Zahlentheorie (LS)“*** nach Absprache mit den Teilnehmern immer ***Dienstag 12-14 Uhr*** statt. Der Raum ist der ***MA 750*** .