Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

WiSe 07
Ausgabe: 21.12.2007
Abgabe: 10.01.2008

Albrecht Gündel-vom Hofe
José Méndez

10. Übung zur Zahlentheorie (LS)

1. ÜA. Es seien $s, g \in \mathbb{N}$. Zeige:
   $(\exists x, y \in \mathbb{Z} \quad x + y = s \wedge (x, y) = g) \Leftrightarrow g|s.$

2. ÜA.Es seien $k, g \in \mathbb{N}$. Zeige:
   $(\exists x, y \in \mathbb{Z} \quad [x, y] = k \wedge (x, y) = g) \Leftrightarrow g|k.$

3. ÜA.Es seien $b, g \in \mathbb{N}$. Zeige:
   $(\exists x, y \in \mathbb{Z} \quad xy = b \wedge (x, y) = g) \Leftrightarrow g^2|b.$

1. HA. (10 Punkte)

   (a) Zeige: $\forall a, b \in \mathbb{N} \quad (a, 4) = 2 \wedge (b, 4) = 2 \implies (a + b, 4) = 4$

   (b) Finde alle positive ganze Lösungen des Gleichungssystems

   $$(x, y) = 10$$

   $$[x, y] = 100$$

   (c) Finde alle positive ganze Lösungen des Gleichungssystems

   $$(x, y, z) = 10$$

   $$[x, y, z] = 100$$

2. HA. (10 Punkte)
   Zeige: Seien $a, m, n, k, l \in \mathbb{N}$. Zeige:

   (a) $m > n \implies a^{2^n} + 1 | a^{2^m} + 1.$

   (b) $m \neq n \wedge a = 2k \implies (a^{2^m} + 1, a^{2^n} + 1) = 1$

   (c) $m \neq n \wedge a = 2l + 1 \implies (a^{2^m} + 1, a^{2^n} + 1) = 2$

   Schöne Ferien wünscht euch das ZT(LS)-Team!