

Albrecht Gündel-vom Hofe
José Méndez

11. Übung zur Zahlentheorie (LS)

1. ÜA. Zeige:

- (a) $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad a|c \wedge b|c \wedge (a, b) = 1) \Rightarrow ab|c.$
- (b) $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad a|bc \wedge (a, b) = 1) \Rightarrow a|c.$
- (c) $(\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \quad a = qb + c \quad q \in \mathbb{Z}) \Rightarrow (a, b) = (b, c).$

2. ÜA.

- (a) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge der Fibonacci-Zahlen definiert durch:

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man gebe a_i für $i = 1, \dots, 8$ an.

- (b) Betrachte die Matrix $F \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Berechne F^n für $n = 1, \dots, 8$ (Verwendung eines Computeralgebrasystems wird empfohlen) und vergleiche F^n mit a_n vom Teil (a). Was lässt sich vermuten?

- (c) Wende den erweiterten Euklidischen Algorithmus auf
1). a_8, a_7 2). $a_8, a_8 - 7$ 3). $a_8, a_8 - 6$ und 4). $a_8, a_8 - 9$ an.
Was lässt sich feststellen?
- (d) Berechne die Eigenwerte λ_1 und λ_2 von F und vergleiche sie mit den auf dem 6. Übungsblatt Übungsaufgabe 2 definierten Zahlen x_n .

1. HA. Betrachte die Matrizen $F, G \in \mathcal{M}_2(\mathbb{Z})$ mit

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad G = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Folge L_n $n \in \mathbb{N}$ ist definiert durch

$$\begin{pmatrix} L_{n+2} & L_{n+1} \\ L_{n+1} & L_n \end{pmatrix} = F^n G.$$

- (a) Gib L_n für $n = 1, \dots, 8$ an.
- (b) Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} \quad L_{n+2}L_n - (L_{n+1})^2 = (-1)^n 5$.
- (c) Zeige: $L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$.
- (d) Sei (a_n) die Folge der Fibonacci-Zahlen. Zeige:

i.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n + a_{n+2} = L_{n+1}.$$

ii.

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad (L_n)^2 - 5(a_n)^2 = (-1)^n 4.$$

iii.

$$\forall m, n \in \mathbb{N} \quad 2a_{m+n} = a_m L_n + a_n L_m.$$

Die Verwendung eines Computeralgebrasystems wird empfohlen. Eine kleine Übersicht wird in der Übung angeboten. Siehe Link auf der Homepage.

2. HA.

(10 Punkte)

- (a) Bestimme die Kettenbruchentwicklung von $\frac{17}{3}$ und $\frac{3}{17}$.
- (b) Beim goldenen Schnitt wird eine Strecke \overline{FH} durch einen Punkt G geteilt, so dass $\overline{FH} : \overline{FG} = \overline{FG} : \overline{GH}$ gilt. Mit $|\overline{FH}| = 1$ und $|\overline{FG}| = x$ gilt

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}.$$

Sei $r = \frac{x}{1-x}$. Berechne eine Approximation von r durch Brüche, deren Nenner der Reihe nach nicht grösser als 10, nicht grösser als 50 bzw. nicht grösser als 100 ist.