Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

WiSe 07
Ausgabe: 17.01.2008
Abgabe: 24.01.2008

Albrecht Gündel-vom Hofe
José Méndez

12. Übung zur Zahlentheorie (LS)

1. ÜA. Sei
$$3x + 5y = 1 \qquad (1)$$
eine Diophantische Gleichung. Zeige:

   (a) Alle Lösungen von (1) werden durch
   $$x = 2 + 5t,\ y = -1 - 3t,\ t \in \mathbb{Z}$$
   angegeben.

   (b) Alle Lösungen von (1) werden auch durch
   $$x = 2 - 5t,\ y = -1 + 3t,\ t \in \mathbb{Z}$$
   angegeben.

   (c) Alle Lösungen von (1) werden auch durch
   $$x = -3 + 5t,\ y = -2 - 3t,\ t \in \mathbb{Z}$$
   angegeben.

   (d) Alle Lösungen von (1) werden durch
   $$x = a + bt,\ y = c + dt,\ t \in \mathbb{Z}$$
   angegeben, genau dann wenn a, c eine Lösung ist und $b = 5$, $d = -3$ oder $b = -5$, $d = 3$.

2. ÜA.

   (a) Finde alle Lösungen von $10x - 7y = 17$.

   (b) Finde alle Lösungen von $97x + 98y = 1000$.

   (c) Finde alle Lösungen von $12x + 501y = 1$.

   (d) Finde alle Lösungen von $12x + 501y = 274$.

3. ÜA. Seien $a, b, c \in \mathbb{N}$ mit $(a, b)|c$ und $L \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Menge aller positiven Lösungen der Gleichung $ax + by = c$. Finde $b, B \in \mathbb{N}$, so dass
$$b \leq |L| \leq B.$$

1. HA. (10 Punkte)

   (a) Sei $101x + 37y = 3819$. Zeige: $\exists\ a, b \in \mathbb{N} \quad (101a + 37b = 3819)$

   (b) Seien $a, b, c \in \mathbb{Z}$ und $L \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ die Menge aller positiven Lösungen der Gleichung $ax + by = c$. Zeige: Es gelte $(a, b) = 1$ und a, b haben verschiedene Vorzeichen, dann ist $|L| = \infty$ für alle c.

2. HA. (10 Punkte)

   Ein ZPE-Ring ist ein Ring R definiert durch:

   (a) R ist nullteilerfrei, kommutativ, und enthält mindestens ein von Null verschiedenes Element.

   (b) Jede von Null verschiedene Nichteinheit $a \in R$ ist Produkt irreduzibler Elemente.

   (c) Die Zerlegung von $a \in R$ ist bis auf die Reihenfolge der Faktoren Multiplikation mit Einheiten eindeutig.

   Es sei R ein ZPE-Ring.

   (a) Zeige: Jedes $a \in R \backslash \{0\}$ ist nur in endlich vielen Hauptidealen enthalten.

   (b) Jede aufsteigende (bezüglich der Inklusion) Folge $I_n \ \ n \in \mathbb{N}$ von Hauptidealen wird stationär, d.h. es existiert $i \in \mathbb{N}$ mit $I_i = I_{i+1} = I_{i+2} = .. = I_n$

   (c) Zeige: Wenn $I, J \subset R$ Hauptidealen sind, dann ist $I \cap J$ wieder ein Hauptideal.