

Albrecht Gündel vom Hofe
Jose Mendez

Zahlentheorie (LS)

Eine elementare, effiziente Form ganze rationale Funktionen zu approximieren, kann unter Verwendung des Horner-Schemas implementiert werden.

Seien $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ und $P_n[x]$ der Vektorraum der Polynome in der Unbestimmten x über dem Körper \mathbb{K} vom Grad $d \leq n$. D.h.: $p(x) \in P_n$ ist der Form

$$p(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i, \quad a_i \in \mathbb{K}, \quad a_d \neq 0, \quad a_{d+k} = 0, \quad k = 1, \dots, n-d$$

Wir betrachten die Division von $p(x)$ durch ein Polynom $q(x)$ ersten Grades. Dazu setzen wir $p_0(x) = p(x)$, $q(x) = x - a$ $a \in \mathbb{K}$ und verwenden den euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= (x - a)p_1(x) + b_0, \\ p_1(x) &= (x - a)p_2(x) + b_1, \\ &\vdots \\ p_{n-1}(x) &= (x - a)p_n(x) + b_{n-1}, \\ p_n(x) &= b_n \end{aligned}$$

Die obige Iteration bricht ab, weil $p(x) \in P_n[x]$ und wir haben $p_n(x) = b_n \in \mathbb{K}$. Durch Rücksubstitution erhalten wir eine Darstellung des Polynoms nach Potenzen von $(x - a)$:

$$\begin{aligned} p_0(x) &= b_0 + (x - a)p_1(x) \\ p_0(x) &= b_0 + b_1(x - a) + p_2(x)(x - a)^2 \\ p_0(x) &= b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + p_3(x)(x - a)^3 \\ &\vdots \\ p_0(x) &= b_0 + b_1(x - a) + b_2(x - a)^2 + \dots + b_n(x - a)^n. \end{aligned}$$

Damit haben wir, konstruktiv, eine Abbildung von $P_n[x]$ in $P_n[x - a]$ definiert. Diese Abbildung heißt Translation.

Das erhaltene Polynom entspricht dem n -ten Taylorpolynom von $p(x)$ in a und wir haben ein Polynom, das die eingangs formulierte Approximationsaufgabe löst.

Die Koeffizienten $b_i \in \mathbb{K}$ lassen sich, unter Verwendung des Horner-Schemas berechnen.

Das Horner-Schema entsteht als Abstraktion des Polynomdivisions-Algorithmus-Schemas. Wir zeigen es in drei Schritten für $p(x), q(x) \in P_3[x]$ über \mathbb{R} mit

$$p(x) = p_0(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6, \quad q(x) = x - 1$$

I.

$$\begin{array}{r} x^3 - 6x^2 + 11x - 6 : \quad x - 1 = x^2 - 5x + 6 = p_1(x) \\ \underline{-x^3 + x^2} \\ 0 - 5x^2 + 11x \\ \quad \underline{+5x^2 - 5x} \\ \quad \quad 0 + 6x - 6 \\ \quad \quad \quad \underline{-6x + 6} \\ \quad \quad \quad \quad 0 + 0 = b_0 \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{r} 1 \ -6 \ 11 \ -6 \ \boxed{1} \ 1 \ -5 \ 6 \\ \underline{-1 \ \boxed{1}} \\ 0 \ -5 \ +11 \\ \quad \underline{5 \ \boxed{-5}} \\ \quad \quad 0 \ +6 \ -6 \\ \quad \quad \quad \underline{-6 \ \boxed{6}} \\ \quad \quad \quad \quad 0 \ \boxed{0} \end{array}$$

III.

	1	-6	11	-6
$\boxed{1}$	0	1	-5	6
	1	-5	6	0

Die erste Zeile enthält die Koeffizienten von $p_0(x)$. Die zweite wird aus Teilergebnisse gebildet. Die dritte enthält die Koeffizienten von $p_1(x)$ und b_0 . Iterativ, erhält man

$$b_1 = 2, b_2 = -3, b_3 = 1$$

und damit

$$2(x - 1) - 3(x - 1)^2 + (x - 1)^3$$