Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

WiSe 07
Ausgabe: 25.10.2007
Abgabe: 01.11.2007

Albrecht Gündel-vom Hofe
José Méndez

2. Übung zur Zahlentheorie (LS)

1. Ü. Seien $a, b \in \mathbb{Z}$. Eine Zahl $n \in \mathbb{Z}$ heißt der Form $ak + b$, wenn folgendes gilt:
$$\exists k \in \mathbb{Z} \quad (n = ak + b).$$
Es ist zu zeigen:
   (a)
$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad (n = 3k \quad \vee \quad n = 3k + 1 \quad \vee \quad n = 3k + 2).$$
   (b)
$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad (n^2 = 3k \quad \vee \quad n^2 = 3k + 1).$$
   D.h.: $\nexists k \in \mathbb{Z} \quad (n^2 = 3k + 2)$.

2. Ü Gegeben sind $a = 963$ und $b = 657$. Lassen sich $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{Z}$ bestimmen, so dass $9 = \lambda_1 a + \lambda_2 b$? Es wird eine konstruktive Antwort erwartet.

3. Ü. Zeige: $\forall a, b, c \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \quad (ac \,|\, bc \Rightarrow a \,|\, b)$.

1. H. (10 Punkte)
Sei $n \in \mathbb{N}$ in Dezimalschreibweise gegeben durch
$$n = (a_m a_{m-1} \dots a_0)_{10} = \sum_{k=0}^{m} a_k \cdot 10^k \quad a_k \in \{0, \dots, 9\}.$$
Bezeichne $Q(n) = \sum_{k=0}^{m} a_k$ die Quersumme und $Q'(n) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \cdot a_k$ die alternierende Quersumme von n. Zeige folgende (bekannte) Teilbarkeitsregeln:
   (a) $9 \,|\, n \Leftrightarrow 9 \,|\, Q(n)$.
   (b) $11 \,|\, n \Leftrightarrow 11 \,|\, Q'(n)$.

2. H. (10 Punkte)
   (a) Zeige: $\forall n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \quad (6 \,|\, n(n+1)(n+2))$
   (b) Zeige: $\forall n \in \mathbb{Z} \backslash \{0\} \quad (24 \,|\, n(n+1)(n+2)(n+3))$