Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

WiSe 07
Ausgabe: 01.11.2007
Abgabe: 08.11.2007

Albrecht Gündel-vom Hofe
José Méndez

3. Übung zur Zahlentheorie (LS)

1. Ü. Seien $n, m \in \mathbb{Z}$ ungerade Zahlen.
   (a) Zeige: $2 \mid n^2 + m^2$.
   (b) Zeige: $8 \mid n^2 - 1$.
   (c) Zeige: $\forall n \in \mathbb{N} \, (4 \nmid (n^2 + 2))$.

2. Ü. Bestimme für $a \in \{42, 72, 154, 360\}$ die Teilermengen T_a und zeichne jeweils das Teilerdiagramm. Gibt es darunter isomorphe Teilerdiagramme?

3. Ü. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $\phi_n : \mathbb{Z} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}, \quad (m, n) \mapsto r = m - qn$, die Abbildung, die sich mit Divisionsalgorithmus definieren lässt. Zeige: Unter Verwendung von ϕ_n kann eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{Z}$ definiert werden.

1. H. (10 Punkte)
   (a) Zeige: $\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad (2 \mid n^2 - n)$
   (b) Zeige: $\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad (6 \mid n^3 - n)$
   (c) Zeige: $\forall n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\} \quad (30 \mid n^5 - n)$

2. H. (10 Punkte)
   Sei $(R, +, \cdot)$ ein kommutativer Ring mit 1. Eine Teilmenge $I \subset R$ heißt Ideal von R, falls gilt:
   (a) I ist eine Untergruppe von $(R, +)$.
   (b) $\forall r \in R, \forall a \in I \, (ra \in I)$

   (a) Bestimme die Ideale von $\mathbb{Z}$ und gib mindestens 10 Ideale I an.
   (b) Seien I_i, $i \in \mathbb{N}$ Ideale von $\mathbb{Z}$. Unter Verwendung der Inklusion $\subset$ definiere zwei Ketten $I_1 \subset \cdots \subset I_n$ und $I_1 \subset \cdots \subset I_m$.
   (c) Vergleiche Teilerdiagramme und Ideale. Lässt sich eine Verbindung herstellen? Begründe ausführlich deine Antwort.