Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

WiSe 07
Ausgabe: 08.11.2007
Abgabe: 15.11.2007

Albrecht Gündel-vom Hofe
José Méndez

4. Übung zur Zahlentheorie (LS)

1. ÜA. Sei $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}] := \{a + b\sqrt{-5} : a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.
   (a) Zeige: $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ ist ein Unterring von $\mathbb{C}$.
   (b) Zerlege die Zahl 9 in $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$.

2. ÜA. Zeige: Jede Primzahl p der Form $p = 3k + 1, k \in \mathbb{Z}$ ist der Form $6l + 1, l \in \mathbb{Z}$.

3. ÜA. Seien $n \in \mathbb{Z}$, $\alpha \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{P}$ mit $p^\alpha | n$ und $p^{\alpha+1} \not| n$. Notation: $p^\alpha || n$.
   (a) Zeige: $p^\alpha || n \quad \wedge \quad p^\beta || m \Longrightarrow p^{\alpha+\beta} || nm$.
   (b) Zeige: $p^\alpha || n \quad \wedge \quad p^\alpha || m) \Longrightarrow p^\alpha || n{+}m$ ist im Allgemeinen eine falsche Aussage.

1. HA. (10 Punkte)

   Seien $n \in \mathbb{N}$ ungerade, T_n die Teilermenge sowie

   $$T_n{}^{<} := \{d \in T_n : d < \sqrt{n}\} \quad \text{und} \quad T_n{}^{>} := \{d \in T_n : d > \sqrt{n}\}$$

   (a) Zeige: Es existiert eine injektive Abbildung $\psi : T_n{}^{<} \longrightarrow T_n{}^{>}$
   (Die Voraussetzung n ungerade wird hier nicht benötigt)
   (b) Sei $Q := \{s, t \in \mathbb{N} \quad : \quad n = s^2 - t^2\}$ und $T_n{}^{\geq} := \{d \in T_n : d \geq \sqrt{n}\}$.
   Zeige: Es existiert eine injektive Abbildung $\mu : T_n{}^{\geq} \longrightarrow Q$
   (c) Bestimme $Q := \{s, t \in \mathbb{N} \quad : \quad n = s^2 - t^2\}$ für $n = 945$.

2. HA. (10 Punkte)
   (a) Zeige: Es gibt unendlich viele Zahlen der Form $n = 4k + 3, k \in \mathbb{N}$ mit $3|n$ aber es existieren auch Primzahlen der Form $p = 4l + 3, l \in \mathbb{N}$.
   (b) Finde eine Zahl p, die Primzahl in $\mathbb{Z}$ aber nicht in $\mathbb{Z}[\sqrt{-3}]$ ist.