Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

WiSe 07
Ausgabe: 15.11.2007
Abgabe: 27.11.2007

Albrecht Gündel-vom Hofe
José Méndez

5. Übung zur Zahlentheorie (LS)

1. ÜA. Zeige: $z_1 = 2 + \sqrt{-6}$, $z_2 = 2 - \sqrt{-6}$ und $z_3 = 5 + 0\sqrt{-6}$ sind Primzahlen in $\mathbb{Z}[\sqrt{-6}]$.
2. ÜA.
   (a) Zeige: Die Menge $E = \{4k + 1 : k \in \mathbb{N}\}$ ist bezüglich der Multiplikation abgeschlossen.
   (b) Bestimme die ersten unzerlegbaren Zahlen in E unterhalb von 100.
   (c) Zeige: In E ist die Zerlegung in unzerlegbare Elemente nicht eindeutig.
   (d) Gilt in E die Primeigenschaft (3.2)?
3. ÜA. Mittels des Fundamentalsatzes der Arithmetik lässt sich zeigen:
   $\forall a, b, c \in \mathbb{N}\ (ggT(a, b) = 1 \ \wedge\ ab = c^2 \implies \exists x, y \in \mathbb{N}\ a = x^2 \ \wedge\ b = y^2)$.

1. HA. (10 Punkte)
   Sei $\mathbb{Z}[x]$ die Menge aller Polynomien in einer Unbestimmten x mit Koeffizienten aus $\mathbb{Z}$.
   Zeige: $\nexists f(x) \in \mathbb{Z}[x]\ \forall z \in \mathbb{N}\quad f(z) \in \mathbb{P}$.
2. HA. (10 Punkte)
   (a) Die Ideale von $\mathbb{Z}$ werden mit $n\mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$ bezeichnet. Es sei $n\mathbb{Z}$ ein beliebiges Ideal von $\mathbb{Z}$. Unter Verwendung des Wohlordnungsprinzips bestimme ein erzeugendes Element für $n\mathbb{Z}$.
   (b) Gegeben sei der folgender Algorithmus:
   - Input: $n \in \mathbb{Z}$.
   - Bilde $L := [1, \ldots, n]$
   - Definiere $B = \sqrt{n}$.
   - Streiche aus L alle $k \in L$ so dass $k \in 2\mathbb{Z}$ bis auf 2.
   - Streiche aus L alle $k \in L$ so dass $k \in 3\mathbb{Z}$ bis auf 3.
   - Analog weiter solange $k \leq B$.
   - Output: L

   Welche Zahlen enthält L als Output?
   (c) Berechne L für $n = 200$.

   Tipp: Siehe Satz 3.2.