

Albrecht Bündel-vom Hofe  
José Méndez

## 6. Übung zur Zahlentheorie (LS)

1. ÜA.

(a) Zeige: Ist  $m \in \mathbb{N}$  kein perfektes Quadrat (d.h.  $m \neq x^2$  für alle Zahlen  $x \in \mathbb{N}$ ), dann gilt  $y = \sqrt{m} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Tipp: Anwendung des Fundamentalsatzes der Arithmetik.

(b) Zeige: Ist  $m \in \mathbb{N}$  ein perfektes Quadrat (d.h.  $m = x^2$  für eine Zahl  $x \in \mathbb{N}$ ), und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge definiert durch

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{m}{x_n} \right), \quad x_1 = 1,$$

dann gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$

2. ÜA. Zeige:

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad x_n = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{\sqrt{5} \cdot 2^n} \in \mathbb{N}$$

3. ÜA. Zeige: Für  $a \in \mathbb{R}^{>0}$   $n \geq 2$  und  $1 \leq p < n$  ist

$${}^n\sqrt{a^p} < 1 + \frac{p}{n}(a - 1)$$

Für  $n = 2$  war die geometrische Interpretation dieser Ungleichung schon in den ältesten Kulturen bekannt. Für beliebige  $n$  findet man sie (möglicherweise zum ersten Mal) bei Maclaurin (1729).

1. HA.

(10 Punkte)

Seien  $a \in \mathbb{Q}$  und  $b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

(a) Ist  $c = a + b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  im Allgemeinen eine wahre Aussage?

(b) Ist  $c = a * b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  für  $a \neq 0$  im Allgemeinen eine wahre Aussage?

(c) Gibt es eine Zahl  $a \in \mathbb{R}$  so dass  $a^2 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  aber  $a^4 \in \mathbb{Q}$ ?

(d) Zeige:  $\exists a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \quad (ab \in \mathbb{Q} \wedge a + b \in \mathbb{Q})$

(e) Zeige: Sei  $d \in \mathbb{Q}$   $d > a$ . Zeige:  $\exists c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  so dass  $a < c < d$ .

2. HA.

(10 Punkte)

Zeige:  $m = \sqrt{2} + {}^3\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  und  $n = \sqrt{3} + {}^3\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

Tipp: Finde  $p_m(x) \in \mathbb{Z}[x]$  mit  $p_m(m) = 0$  und  $p_n(x) \in \mathbb{Z}[x]$  mit  $p_n(n) = 0$  und wende den Satz 5.1 an.