

Albrecht Bündel-vom Hofe
José Méndez

7. Übung zur Zahlentheorie (LS)

1. ÜA. Unter Verwendung des Satzes 5.1 bestimme man alle rationalen Nullstellen des Polynoms

$$p(x) = 24x^3 - 26x^2 + 9x - 1 \in \mathbb{Q}[x].$$

2. ÜA. Bestimme die Anzahl der Nullen am Ende der natürlichen Zahl $n = 100!$.

Tipp: Wie oft ist $a = 10$ als Faktor in n enthalten?

3. ÜA. Man zeige mit der Methode von Fermat (s. Skript), dass die Zahl $a = 1126481$ in nichttriviale Faktoren zerlegt werden kann.

1. HA. (10 Punkte)

Es sei $5 < n \in \mathbb{Z}$ ungerade und $a, b \in \mathbb{Z}$. Zeige:

Wenn $n = ab$ mit $0 < a - b \leq \sqrt[4]{64n}$ gilt, dann besitzt das Polynom

$$p(x) = x^2 - 2[n + 1]x + n \in \mathbb{Z}[x]$$

Nullstellen $x_1, x_2 \in \mathbb{Z}$.

2. HA. (10 Punkte)

Zeige: Für $n = p^\alpha \in \mathbb{N}$ mit $\alpha \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{P}$ gilt:

$$\sigma(n) = 2n - 1 \quad \Leftrightarrow \quad p = 2.$$