Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

WiSe 07
Ausgabe: 06.11.2007
Abgabe: 13.12.2007

Albrecht Gündel-vom Hofe
José Méndez

8. Übung zur Zahlentheorie (LS)

1. ÜA.

   (a) Zeige: $p \in \mathbb{P} \;\Leftrightarrow \sigma(p) = p + 1$.

   (b) Zeige: $\forall\, N \in \mathbb{N} \quad \exists\, a \in \mathbb{N} \qquad \frac{\sigma(a)}{a} \geq N$.

2. ÜA.

   (a) Entscheide welche der folgenden Zahlen gerade vollkommene Zahlen sind: 6, 28, 250, 496 und finde drei weitere.

   (b) Zeige: Seien $a, b \in \mathbb{N}$ mit $b \in \mathbb{P}$ ungerade und $\log_2(b+1) \geq 2$. Dann ist

   $$a := 2^{\log_2(b+1)-1} b$$

   eine gerade vollkommene Zahl.

3. ÜA. Zeige:
   $\forall k, q \in \mathbb{Z} \quad (k|q \;\wedge\; k < q \;\wedge\; \sigma(q) = q + k \quad \Longrightarrow \quad k = 1)$

1. HA. (10 Punkte)
   (Die Moebius-Funktion) Es sei $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$,

   $$n \mapsto \begin{cases} 1 & n = 1, \\ 0 & \exists\, a \in \mathbb{N} \quad (a > 1 \;\wedge\; a^2|n), \\ (-1)^k & n = p_1 \cdots p_k \quad p_i \neq p_j \quad \text{für} \quad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq k. \end{cases} \tag{1}$$

   Die Moebius-Funktion ist multiplikativ.

   (a) Finde $n \in \mathbb{N}$ mit $\mu(n) + \mu(n+1) + \mu(n+2) = 3$.

   (b) Zeige: $\forall\, n \in \mathbb{N} \quad \mu(n)\mu(n+1)\mu(n+2)\mu(n+3) = 0$

   (c) Sei $n \in \mathbb{N}$ mit k verschiedenen Primfaktoren. Zeige:

   $$\sum_{t \in T_n} |\mu(t)| = 2^k.$$

2. HA. (10 Punkte)

   Es seien $n \in \mathbb{N}$, $P(n) = \prod_{t \in T_n} t$ und $p, q \in \mathbb{P}$ mit $p \neq q$. Zeige:

   $$P(n) = n^2 \quad \Leftrightarrow \quad n = 1 \;\vee\; n = pq \;\vee\; n = p^3.$$