Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

WiSe 07
Ausgabe: 14.12.2007
Abgabe: 21.12.2007

Albrecht Gündel-vom Hofe
José Méndez

9. Übung zur Zahlentheorie (LS)

1. ÜA.

   Seien $m, n \in \mathbb{Z}$ und $m\mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ die von m bzw. n erzeugten Idealen.

   (a) Bestimme $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$.

   (b) Berechne $g := (m, n)$. Was kann man über das Ideal $g\mathbb{Z}$ inbezug auf $m\mathbb{Z}$,$n\mathbb{Z}$ und $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z}$ sagen?

2. ÜA. Seien $f(x) = x^4+x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$ und $g(x) = x^2+1 \in \mathbb{R}[x]$. Bestimme $(f(x), g(x))$ und zwei Polynome $u(x), v(x) \in \mathbb{R}[x]$ mit $(x^4+x^2+1, x^2+1) = u(x)f(x)+v(x)g(x)$.

3. ÜA. Löse folgende Gleichungen in $\mathbb{Q}$:

$$243x + 198y = 9 \qquad 71x - 50y = 1$$

1. HA. (10 Punkte)

   (a) Zeige: Es existieren unendlich viele $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x + y = 100$ und $(x, y) = 5$.

   (b) Zeige: $\nexists\, x, y \in \mathbb{Z} \quad (x + y = 100 \ \wedge \ xy = 3)$

   (c) Es seien $s, g \in \mathbb{N}$. Zeige:

$$(\exists x, y \in \mathbb{Z} \qquad x + y = s \wedge xy = g) \ \Leftrightarrow \ g|s$$

2. HA. (10 Punkte)

   (a) Zeige: $\forall a, b \in \mathbb{N}\ a + b \leq (a, b) + [a, b]$.

   (b) Zeige, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $(a, b) = 1$ für $a = n! + 1, b = (n + 1)! + 1$.