A. INTEGRATION

A1. Einleitung

In diesem Semester fangen wir mit Integration an. Es gibt viele Möglichkeiten, das Integral einer Funktion genau zu definieren; wir benutzen das sogenannte Regelintegral.

Danach definieren wir metrische Räume. Wichtige Beispiele davon sind die komplexe Zahlen $\mathbb{C}$ und der euklidische Raum $\mathbb{R}^n$. Wir übertragen die topologische Begriffe (Offenheit, Stetigkeit, Kompaktheit, Konvergenz, usw.) von $\mathbb{R}$ auf beliebige metrische Räume.

Mit diesen Grundlagen können wir Analysis auch mehrdimensional machen. Insbesondere werden wir Ableitungen von Funktionen $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ untersuchen und die wichtigsten Sätze dazu (Umkehrsatz, Rangsatz) beweisen.

A2. Treppenfunktionen und Regelfunktionen

Wir betrachten ein kompaktes Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und Funktionen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$.

Wir wollen den Flächeninhalt zwischen dem Graphen der Funktion f und der Achse messen; wir nennen diesen das *Integral*

$$\int_a^b f = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(Wenn f negative Werte annimmt wird hierbei vereinbart, dass Flächen unterhalb der Achse negativ berechnet werden.) Offensichtlich gilt im Falle einer konstanten Funktion

$$\int_a^b c = c(b-a).$$

Es muss nicht sein, dass f stetig ist. Hingegen sind es die Treppenfunktionen, die man am einfachsten integrieren kann.

Definition A2.1. Eine *Zerlegung* Z von $[a,b]$ in k Teile ($k \in \mathbb{N}^+$) ist durch

$$a = z_0 < z_1 < \cdots < z_{k-1} < z_k = b$$

gegeben. Für $1 \le j \le k$ schreiben wir $\Delta z_j = z_j - z_{j-1}$; wir nennen $\Delta(Z) := \max_j \Delta z_j$ die *Maschenweite* von Z. Eine *markierte Zerlegung* $\dot{Z}$ ist eine Zerlegung Z wo man zusätzlich für jedes $1 \le j \le k$ einen Punkt $\xi_j \in (z_{j-1}, z_j)$ ausgewählt hat.

Definition A2.2. Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt dann *stückweise konstant* bzw. *stückweise stetig* bzw. *stückweise monoton*, falls es eine Zerlegung Z von $[a,b]$ und konstante bzw. stetige bzw. monotone Funktionen $f_j\colon [z_{j-1}, z_j] \to \mathbb{R}$ so gibt, dass $f_j(x) = f(x)$ für alle $x \in (z_{j-1}, z_j)$.

Eine stückweise konstante Funktion f heißt auch *Treppenfunktion*; eine Zerlegung, die zeigt, dass f eine Treppenfunktion ist, heißt eine *Treppenzerlegung* für f.

Bemerkung A2.3. Es folgt, dass f selbst auf jedem offenen Intervall (z_{j-1}, z_j) konstant bzw. stetig bzw. monoton ist. Die Werte $f(z_j)$ hingegen dürfen beliebig sein.

Bemerkung A2.4. Eine Funktion f ist genau dann stückweise stetig, wenn es eine Zerlegung so gibt, dass für jedes j die Einschränkung $f|_{(z_{j-1},z_j)}$ eine stetige Erweiterung auf $[z_{j-1}, z_j]$ hat.

Beispiel A2.5. Seien $f, g\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ wie folgt definiert: $f(x) := \sin {}^1\!/_x$ und $g(x) := {}^1\!/_{\sin x}$ für $x \neq 0$ und $f(0) := g(0) := 0$. Weder f noch g ist stückweise stetig. Betrachten wir die Zerlegung

$$-1 = z_0 < 0 = z_1 < 1 = z_2,$$

sind die Einschränkungen $f|_{(z_{j-1},z_j)}$ und $g|_{(z_{j-1},z_j)}$ jeweils stetig, erlauben aber keine stetige Erweiterungen in 0.

Lemma A2.6. *Eine Funktion f, die stückweise konstant oder stetig oder monoton ist, ist beschränkt.*

Beweis. Jede Funktion f_j (in der Definition) ist beschränkt, weil sie konstant bzw. stetig bzw. monoton auf dem kompakten Intervall $[z_{j-1}, z_j]$ ist. Schreiben wir die Schranke als $|f_j| \le C_j$, dann gilt

$$\big|f(x)\big| \le \max\Big\{ \max_j C_j,\ \max_j \big|f(z_j)\big| \Big\}. \qquad \square$$

Bemerkung A2.7. Eine stückweise stetige Funktion f hat in jedem Punkt $p \in [a,b]$ einseitige Grenzwerte

$$f(p^\pm) := \lim_{x \to p^\pm} f(x).$$

In den Punkten z_j dürfen die Werte $f(z_j^-)$, $f(z_j)$ und $f(z_j^+)$ alle unterschiedlich sein.

Definition A2.8. Eine *Regelfunktion* $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist eine Funktion, von der alle möglichen einseitigen Grenzwerte existieren. D.h., für jedes $p \in [a,b)$ existiert $f(p^+)$ und für jedes $p \in (a,b]$ existiert $f(p^-)$.

Beispiel A2.9. Stückweise stetige Funktionen (insbesondere Treppenfunktionen) sind Regelfunktionen.

Lemma A2.10. *Eine Regelfunktion ist beschränkt.*

Beweis. (Aufgabe.) $\square$

Beispiel A2.11. Sei $W\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$W(x) = \begin{cases} {}^1\!/_q, & x = {}^p\!/_q \in \mathbb{Q} \text{ mit } p,q \text{ teilerfremd}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

die wir schon im letzten Semester gesehen haben. Dann ist W eine Regelfunktion, weil in jedem Punkt die einseitigen Grenzwerte 0 sind. (Hingegen ist $\chi_{\mathbb{Q}}\colon x \to \operatorname{sgn} W(x)$ keine Regelfunktion.)

Definition A2.12. Wir schreiben $\mathcal{R}_{[a,b]}$ für die Menge aller Regelfunktionen auf $[a,b]$ und $\mathcal{T}_{[a,b]}$ für die Teilmenge aller Treppenfunktionen.

Lemma A2.13. *Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Treppen- bzw. Regelfunktionen und sei $c \in \mathbb{R}$. Dann ist auch $f + cg$ eine Treppen- bzw. Regelfunktion. D.h., $\mathcal{R}_{[a,b]}$ und $\mathcal{T}_{[a,b]}$ sind Vektorräume.*

Beweis. (Aufgabe.) $\square$

A3. Konvergenz von Funktionen

Wir betrachten nach wie vor Funktionen auf einem kompakten Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$.

Definition A3.1. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ sei $f_k\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion. Falls für jedes $x \in [a,b]$ die Folge $(f_k(x))$ einen Grenzwert in $\mathbb{R}$ hat, definieren wir $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \lim_{k\to\infty} f_k(x).$$

Wir sagen, die Folge (f_k) von Funktionen *konvergiert punktweise* gegen den Limes f.

Beispiel A3.2. Für $k \in \mathbb{N}$ sei f_k die Potenzfunktion $f_k\colon x \mapsto x^k$ auf $[0,1]$. Dann konvergiert (f_k) punktweise gegen die Funktion $f = \chi_{\{1\}}$ mit $f(1) = 1$ und $f(x) = 0$ für $x < 1$.

Definition A3.3. Seien f und f_k ($k \in \mathbb{N}$) Funktionen auf $[a,b]$. Für jedes k setzen wir

$$\delta_k := \sup_{x\in[a,b]} \left|f(x) - f_k(x)\right| \in [0,+\infty].$$

Falls $\delta_k \to 0$, sagen wir, (f_k) *konvergiert gleichmäßig* gegen f.

Bemerkung A3.4. Eine Folge, die gleichmäßig konvergiert, konvergiert auch punktweise aber nicht umgekehrt. (Im letzten Beispiel gilt $\delta_k = 1$ für alle k, d.h. (f_k) konvergiert nicht gleichmäßig.)

Ende der Vorlesung 2008 Oktober 13

Satz A3.5. *Eine Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Regelfunktion, wenn es eine Folge (φ_k) von Treppenfunktionen gibt, die gegen f gleichmäßig konvergiert.*

Bemerkung A3.6. Falls φ_k eine Treppenfunktion ist und $\sup|f-\varphi_k| < \varepsilon$, sagen wir, φ_k ist eine ε-Treppenapproximation für f. Der Satz sagt, die Regelfunktionen sind genau die, die für jedes $\varepsilon > 0$ eine ε-Treppenapproximation haben.

Für den Beweis brauchen wir zwei Lemmata.

Lemma A3.7. *Sei $p \in [a,b]$ und sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion, deren einseitige Grenzwerte in p existieren. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann $\delta > 0$, so dass $f|_{I_\delta}$ eine ε-Treppenapproximation hat, wo I_δ das Intervall $I_\delta := [a,b]\cap[p-\delta, p+\delta]$ um p bedeutet.*

Beweis. Wir betrachten den Fall $p \in (a,b)$. (Falls p ein Endpunkt ist, wird alles nur einfacher, weil wir nur eine Seite betrachten müssen.) Seien $f(p^-)$ und $f(p^+)$ die beiden Grenzwerte und sei φ die Treppenfunktion

$$\varphi(x) = \begin{cases} f(p^-), & x < p, \\ f(p), & x = p, \\ f(p^+), & x > p. \end{cases}$$

Existenz der einseitigen Grenzwerte heißt, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ es $\delta^\pm > 0$ so gibt, dass auf $[p-\delta^-, p)$ bzw. auf $(p, p+\delta^+]$ gilt $\left|f(x) - f(p^\pm)\right| < \varepsilon$. Mit $\delta = \min(\delta^-, \delta^+)$ folgt das Lemma. □

Lemma A3.8. *Sei f eine Funktion auf $[a,b]$. Sie hat in b genau dann einen linksseitigen Grenzwert $f(b^-)$, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ es ein $\delta > 0$ so gibt, dass $\left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon$ für alle $x, y \in (b-\delta, b)$. (Ähnliches gilt für rechtsseitige Grenzwerte.)*

Beweis. Eine Richtung ist einfach: falls der Grenzwert $f(b^-)$ existiert, gibt es $\delta > 0$, so dass $\left|f(x) - f(b^-)\right| < \varepsilon/2$ für alle $x \in (b-\delta, b)$. Dann folgt $\left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon$ aus der Dreiecksungleichung.

Umgekehrt habe wir – zu jedem $\varepsilon > 0$ – ein $\delta > 0$, so dass $\left|f(x) - f(y)\right| < \varepsilon$ für alle $x, y \in (b-\delta, b)$. Aus dem letzten Semester (Lemma I.D3.8, leicht an einseitige Grenzwerte angepasst) wissen wir, dass $f(b^-)$ genau dann existiert, wenn für jede Folge $x_n \to b$ mit $x_n < b$ die Folge $f(x_n)$ auch konvergiert. Weil $x_n \to b$ gibt es n_0, so dass $x_n \in (b-\delta, b)$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt $\left|f(x_n) - f(x_m)\right| < \varepsilon$ für alle $n, m \geq n_0$. Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, ist $f(x_n)$ eine Cauchyfolge und hat deshalb einen Grenzwert. □

Beweis des Satzes. Sei (φ_k) eine Folge von Treppenfunktionen, die gegen f gleichmäßig konvergiert. Sei $p \in (a,b]$. Wir wollen zeigen, dass der Grenzwert $f(p^-)$ existiert. Dazu sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir wählen $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sup_{[a,b]} \left|f(x) - \varphi_k(x)\right| < \varepsilon/2.$$

Weil φ_k eine Treppenfunktion ist, gibt es $\delta > 0$, so dass φ_k auf $(p-\delta, p)$ konstant ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} &\left|f(x) - f(y)\right| \\ &\quad\leq \left|f(x) - \varphi_k(x)\right| + \left|\varphi_k(x) - \varphi_k(y)\right| + \left|\varphi_k(y) - f(y)\right| \\ &\quad< \varepsilon/2 + 0 + \varepsilon/2 = \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $x, y \in (p-\delta, p)$. Dann existiert $f(p^-)$ aus Lemma A3.8.

Umgekehrt, sei $\varepsilon > 0$ und sei f eine Funktion, die keine ε-Treppenapproximation auf $[a,b] =: [a_0, b_0]$ hat. Wir halbieren das Intervall:

$$[a_0, b_0] = [a_0, m_0] \cup [m_0, b_0], \qquad m_0 = \frac{a_0 + b_0}{2}.$$

Auf mindestens einer Hälfte (die wir $[a_1, b_1]$ nennen) hat f wieder keine ε-Treppenapproximation, sonst könnten wir die beiden Approximationen zusammenkleben. Dieses Halbieren wiederholen wir per Induktion; wir bekommen ineinander geschachtelte Intervalle $[a_n, b_n]$ von Länge $(b-a)/2^n$. Die Cauchyfolgen (a_n) und (b_n) haben einen gemeinsamen Grenzwert $p \in [a,b]$. Aus Lemma A3.7 folgt nun, das f keine Regelfunktion ist: hätte f einseitge Grenzwerte in p, gäbe es für f eine ε-Treppenapproximation auf einer Umgebung I_δ von p; diese Umgebung enthielte aber für großes n das Intervall $[a_n, b_n]$, wo es keine Approximation gibt. □

A4. Integrale

a. Treppenintegral

Definition A4.1. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $\dot{Z}$ eine markierte Zerlegung von $[a,b]$. Die *Riemann'sche Summe* von

f bezüglich $\dot{Z}$ ist

$$S(f,\dot{Z}) := \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\,\Delta z_j = \sum_{j=1}^{k} f(\xi_j)\,(z_j - z_{j-1}).$$

Lemma A4.2. *Sei $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion und seien $\dot{Z}, \dot{Z}'$ zwei markierte Treppenzerlegungen für φ. Dann gilt $S(\varphi,\dot{Z}) = S(\varphi,\dot{Z}')$.*

Beweisskizze. Weil jedes φ_j konstant ist, hängt $S(\varphi,\dot{Z})$ nicht von den ausgewählten $\xi_j \in [z_{j-1}, z_j]$ ab, d.h., höchstens von der Zerlegung Z. Die zwei Zerlegungen Z und Z' haben eine gemeinsame Verfeinerung $Z \cup Z'$. Man muss nur noch zeigen, dass die Riemmann'sche Summe unverändert bleibt, wenn man einer Treppenzerlegung einen neuen Punkt hinzufügt. □

Definition A4.3. Sei $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenfunktion. Das *Integral* von φ definieren wir wie folgt:

$$\int_a^b \varphi := S(\varphi,\dot{Z}),$$

wo $\dot{Z}$ eine beliebige Treppenzerlegung für φ ist.

Lemma A4.4. *Das Integral $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi$ ist eine lineare Abbildung $\mathcal{T}_{[a,b]} \to \mathbb{R}$. Es ist monoton im Sinne, dass*

$$\varphi \geq 0 \implies \int_a^b \varphi \geq 0.$$

Beweis. (Aufgabe.) □

Wie in jedem Fall, wo ein Integral linear und monoton ist, haben wir gleich ein Korollar:

Korollar A4.5. *Seien f, g Treppenfunktionen auf $[a,b]$. Falls $f \leq g$, gilt $\int_a^b f \leq \int_a^b g$. Es folgt, dass*

$$\left|\int_a^b f\right| \leq \int_a^b |f|.$$

Beweis. Die erste Ungleichung folgt direkt aus Linearität und Monotonie des Integrals. (Aufgabe.) Die Zweite folgt dann aus $-|f| \leq f \leq |f|$. □

Bemerkung A4.6. Die Einschränkung einer Treppenfunktion $\varphi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ auf ein beliebiges kompaktes Teilintervall ist auch eine Treppenfunktion.

Lemma A4.7. *Sei φ eine Treppenfunktion auf $[a,b]$ und sei $p \in (a,b)$. Dann gilt Intervalladditivität:*

$$\int_a^b \varphi = \int_a^p \varphi + \int_p^b \varphi.$$

Beweis. (Aufgabe.) □

b. Regelintegral

Natürlich wollen wir nicht nur Treppenfunktionen integrieren können. Es gibt viele möglichkeiten, das Integral zu erweitern (z.B. Riemann-Integral, Lebesgue-Integral, Gauge-Integral). Die unterscheiden sich dadurch, auf welchem Vektorraum $V \supset \mathcal{T}_{[a,b]}$ von Funktionen das Integral definiert ist. Das Integral ist aber immer eine monotone lineare Abbildung mit Intervalladditivität. Das heißt, auf unserem Wunschzettel für ein Integral steht:

$$\int_a^b (f + cg) = \int_a^b f + c\int_a^b g,$$
$$f \geq 0 \implies \int_a^b f \geq 0,$$
$$\int_a^b f = \int_a^p f + \int_p^b f.$$

Wie im Korollar A4.5 folgt, dass $f \leq g \implies \int f \leq \int g$ und dass $\left|\int f\right| \leq \int |f|$.

Lemma A4.8. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion, und (φ_n) eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann konvergiert in $\mathbb{R}$ die Folge $\left(\int_a^b \varphi_n\right)$. Der Grenzwert ist unabhängig von der gewählten Folge (φ_n).*

Definition A4.9. Den Grenzwert aus diesem Lemma nennen wir das *(Regel-)Integral* $\int_a^b f$.

`Ende der Vorlesung 2008 Oktober 16`

Beweis. Wir setzen $\delta_n := \sup_x \left|f(x) - \varphi_n(x)\right|$. Für jedes x gilt aus der Dreiecksungleichung

$$\left|\varphi_n(x) - \varphi_m(x)\right| \leq \delta_n + \delta_m.$$

Daher gilt

$$\left|\int_a^b \varphi_n - \int_a^b \varphi_m\right| \leq \int_a^b \left|\varphi_n - \varphi_m\right| \leq (b-a)(\delta_n + \delta_m).$$

Weil $\delta_n \to 0$, heißt das, dass $\left(\int_a^b \varphi_n\right)$ eine Cauchyfolge ist. Deshalb konvergiert sie.

Konvergieren (φ_n) und (ψ_n) gleichmäßig gegen f, dann auch die Folge

$$(\varphi_0, \psi_0, \varphi_1, \psi_1, \ldots).$$

Weil die Integrale zu dieser Folge konvergieren, haben $\left(\int_a^b \varphi_n\right)$ und $\left(\int_a^b \psi_n\right)$ den selben Grenzwert. □

Lemma A4.10. *Das Regelintegral ist linear, monoton und intervalladditiv, erfüllt also unsere Wünsche.*

Beweis. (Aufgabe.) □

Definition A4.11. Der *Mittelwert* von f auf $[a,b]$ ist

$$\fint_a^b f := \frac{\int_a^b f}{\int_a^b 1} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f.$$

Satz A4.12 (Mittelwertsatz der Integralrechnung). *Sei f eine Regelfunktion auf $[a,b]$. Falls $m \le f(x) \le M$ für alle x, dann gilt $m \le \fint_a^b f \le M$. Falls f stetig ist, wird der Mittelwert angenommen, d.h., es gibt ein $p \in [a,b]$ mit $f(p) = \fint_a^b f$.*

Beweis. Betrachten wir m und M als konstante Funktionen, folgt $m \le \fint_a^b f \le M$ direkt aus dem letzten Korollar. Für stetige f nehmen wir $m := \inf f$, $M := \sup f$. Nach dem Zwischenwertsatz (I.D6.1) nimmt f jeden Wert in $[m,M]$ an. □

Definition A4.13. Sei f eine Funktion und $\dot Z$ eine markierte Zerlegung. Wir definieren wie folgt eine Treppenfunktion $\varphi(f,\dot Z)$, für die Z eine Treppenzerlegung ist:

$$(\varphi(f,\dot Z))(x) := \begin{cases} f(\xi_j), & x \in (z_{j-1}, z_j), \\ f(z_j), & x = z_j. \end{cases}$$

Es gilt dann

$$\int_a^b \varphi(f,\dot Z) = S(f,\dot Z).$$

Satz A4.14. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann ein $\delta > 0$, so dass für eine beliebige markierte Zerlegung $\dot Z$ mit Maschenweite $\Delta(Z) < \delta$ gilt*

$$\left| S(f,\dot Z) - \int_a^b f \right| < \varepsilon.$$

Kurz gefasst:

$$\int_a^b f = \lim_{\Delta(Z)\to 0} S(f,\dot Z).$$

Bemerkung A4.15. Für stetige f und $\Delta(Z) \to 0$ konvergieren die Treppenfunktionen $\varphi(f,\dot Z)$ gleichmäßig gegen f. Das gilt nicht mehr, wenn f einen Sprung hat. Im Satz behaupten wir aber nur, dass die Integrale dieser Treppenfunktionen konvergieren.

Definition A4.16. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine (beschränkte) Funktion. Falls der Grenzwert $\lim_{\Delta(Z)\to 0} S(f,\dot Z)$ existiert, nennen wir ihn das *Riemann-Integral* von f und sagen, f ist *Riemann-integrierbar*. (Der Satz sagt, jede Regelfunktion ist Riemann-integrierbar und das Riemann-Integral stimmt mit dem Regelintegral überein.)

Lemma A4.17. *Der Satz gilt im Falle, dass $f = \psi$ eine Treppenfunktion ist.*

Beweis. Sei Z' eine Treppenzerlegung für ψ und (für jedes $1 \le j \le k'$) sei c_j der konstante Wert von $\psi|_{(z'_{j-1}, z'_j)}$. In z'_j hat ψ einen Sprung; in einer kleinen Umgebung nimmt ψ die drei Werte c_j, $\psi(z'_j)$, c_{j+1} an. Der maximale Unterschied dazwischen nennen wir

$$s_j := \max\bigl\{ |c_j - c_{j+1}|,\ |c_j - \psi(z'_j)|,\ |c_{j+1} - \psi(z'_j)| \bigr\}.$$

Wir vereinbaren zunächst, dass $\delta \le \min_j \Delta z'_j$. Sei nun $\dot Z$ eine Zerlegung mit Maschenweite $\Delta(\dot Z) < \delta$ und sei $\varphi := \varphi(\psi, \dot Z)$. Jedes Teilintervall in Z ist kleiner als jedes in Z', d.h., jedes (z_{i-1}, z_i) beinhaltet entweder kein z'_j oder genau eins.

Im ersten Fall gibt es j, so dass $(z_{i-1}, z_i) \subset (z'_{j-1}, z'_j)$. Dann gilt $\psi \equiv \varphi \equiv c_j$ auf (z_{i-1}, z_i) und deshalb

$$\int_{z_{i-1}}^{z_i} |\psi - \varphi| = 0.$$

Im zweiten Fall nimmt ψ auf (z_{i-1}, z_i) die drei Werte c_j, $\psi(z'_j)$, c_{j+1} an; hingegen ist φ konstant mit einer dieser drei Werte. D.h., $|\psi - \varphi| \le s_j$ und

$$\int_{z_{i-1}}^{z_i} |\psi - \varphi| \le s_j \,\Delta z_i < s_j \delta.$$

Jedes j taucht höchstens einmal auf, also

$$\int_a^b |\psi - \varphi| < \delta \sum_{j=1}^{k'-1} s_j.$$

Jetzt nehmen wir $\delta < \varepsilon \,/\, \sum s_j$ (und immer noch $\delta \le \Delta z'_j$). Dann gilt

$$\left| S(\psi,\dot Z) - \int_a^b \psi \right| \le \left| \int_a^b \varphi - \int_a^b \psi \right| \le \int_a^b |\varphi - \psi| < \varepsilon. \qquad \square$$

Ende der Vorlesung 2008 Oktober 20

Beweis des Satzes. Sei $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{3(b-a)}$ und wählen eine ε'-Treppenapproximation ψ für f.

Sei nun eine markierte Zerlegung $\dot Z$ mit Maschenweite $\Delta(Z)$ gegeben. Wir setzen $\varphi := \varphi(f,\dot Z)$ und $\varphi' := \varphi(\psi,\dot Z)$. Aus $\sup|f-\psi| \le \varepsilon'$ folgt $\sup|\varphi - \varphi'| \le \varepsilon'$, weil φ bzw. φ' die Werte $f(\xi_j)$ bzw. $\psi(\xi_j)$ annehmen. Deshalb gilt

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f - S(f,\dot Z) \right| &= \left| \int_a^b f - \int_a^b \varphi \right| \\ &\le \int_a^b |f-\psi| + \left| \int_a^b (\psi - \varphi') \right| + \int_a^b |\varphi' - \varphi| \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \left| \int_a^b (\psi - \varphi') \right| + \frac{\varepsilon}{3}. \end{aligned}$$

Aus dem Lemma können wir δ so wählen, dass für $\Delta(Z) < \delta$ gilt $\left|\int_a^b (\psi - \varphi')\right| \le \varepsilon/3$. Dann gilt auch $\left|\int_a^b f - S(f,\dot Z)\right| < \varepsilon$. □

A5. Unbestimmte Integrale

Definition A5.1. Bis jetzt hat $\int_a^b f$ nur dann eine Bedeutung, wenn $a < b$. Wir ergänzen jetzt diese Notation, in dem wir $\int_a^a f := 0$ und $\int_b^a f := -\int_a^b f$ setzen.

Lemma A5.2. *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und seien $p,q,r \in [a,b]$ drei Punkte in beliebiger Reihenfolge. Dann gilt Intervalladditivität*

$$\int_p^q f + \int_q^r f = \int_p^r f.$$

Beweis. (Aufgabe.) □

Definition A5.3. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion und sei $c \in [a,b]$. Die Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$F(p) := \int_c^p f(x)\,dx,$$

heißt ein *unbestimmtes Integral* von f.

Einseitige Ableitungen wurden im letzten Semester kurz eingeführt (siehe Beispiel I.E1.6).

Satz A5.4. *Sei f eine Regelfunktion auf $[a,b]$. Ein unbestimmtes Integral F von f ist stetig und hat in jedem $p \in [a,b]$ einseitige Ableitungen $F'_\pm(p) = f(p^\pm)$. Falls f in p stetig ist, folgt, dass F in p differenzierbar ist mit $F'(p) = f(p)$.*

Beweis. Wir betrachten den Fall der rechtsseitige Ableitung. Deren Definition (mit der von F) gibt:

$$F'_+(p) := \lim_{h\to 0^+} \frac{F(p+h)-F(p)}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\int_c^{p+h} f - \int_c^p f}{h}$$
$$= \lim_{h\to 0^+} \fint_p^{p+h} f.$$

Weil f eine Regelfunktion ist, existiert $f(p^+)$. D.h., zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$ so, dass $|f(x) - f(p^+)| < \varepsilon$ für $x \in (p, p+\delta)$. Für $h < \delta$ gilt dann aus dem Mittelwertsatz A4.12, $\left|\fint_p^{p+h} f - f(p^+)\right| < \varepsilon$. Es folgt,

$$F'_+(p) = \lim_{h\to 0^+} \fint_p^{p+h} f = f(p^+).$$

Ähnliches gilt für die linksseitige Ableitung. (Mit der ergänzten Notation sieht der Beweis sogar fast gleich aus, z.B. auch im Falle $h < 0$ können wir $\fint_p^{p+h} f$ schreiben.)

Schon die Existenz der einseitigen Ableitungen von F in p genügt, um zu zeigen, F ist in p stetig. Hier heißt das, F ist auf $[a,b]$ stetig. Falls f in p stetig ist, gilt

$$F'_-(p) = f(p^-) = f(p) = f(p^+) = F'_+(p),$$

d.h., F ist in p differenzierbar. □

Wir werden den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung nur für stetige Funktionen betrachten. Man kann diesen auch auf beliebigen Regelfunktionen erweitern, in dem man vorsichtig mit den abzählbaren Mengen der Unstetigkeit umgeht. (Siehe z.B. Königsberger, *Analysis 1*, §11.4.)

Definition A5.5. Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Eine stetig differenzierbare Funktion $\Phi\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $\Phi' = f$ heißt eine *Stammfunktion* für f.

Bemerkung A5.6. Seien Φ und Ψ zwei Stammfunktionen für f. Korollar I.E2.8 sagt dann, $\Phi - \Psi \equiv C \in \mathbb{R}$.

Satz A5.7 (Hauptsatz). *Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Für jedes $c \in [a,b]$ ist das unbestimmte Integral $F(x) := \int_c^x f$ eine Stammfunktion für f. Sei nun Φ eine beliebige Stammfunktion für f. Für $p,q \in [a,b]$ gilt*

$$\int_p^q f = \Phi(q) - \Phi(p) =: \Phi\Big|_p^q.$$

Beweis. Weil f stetig ist, sagt Satz A5.4, dass $F' = f$ in jedem Punkt. Deshalb ist F eine Stammfunktion. Jede Stammfunktion ist $\Phi = F + C$ für $C \in \mathbb{R}$. Aus Intervalladditivität folgt, dass

$$\Phi\Big|_p^q = F\Big|_p^q = \int_p^q f.$$ □

Der Satz sagt, unbestimmte Integrale sind Stammfunktionen. Wenn Φ eine Stammfunktion für f ist, schreiben wir deshalb $\int f = \Phi$.

Jede Ableitung, die wir kennen, gibt uns jetzt eine Integrationsformel. Es gelten z.B.

$$\int \exp = \exp, \qquad \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x,$$
$$\int \sin = -\cos, \qquad \int \cos = \sin.$$

Für $-1 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ gilt

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha+1} x^{\alpha+1},$$

womit man leicht jedes Polynom integrieren kann. Für $\alpha = -1$ und $x > 0$ gilt $\int 1/x\,dx = \log x$.

Manche Autoren schreiben solche Integrationsformeln eher in der Form $\int f = \Phi + C$, um zu betonen, dass die Stammfunktion Φ nicht eindeutig ist. Hier heißt C die *Integrationskonstante*, eine beliebige reelle Zahl. Wenn wir diese Konstante weglassen, müssen wir sorgfältig sein. Es gilt z.B. sowohl

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x$$

als auch

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\arccos x.$$

Man darf aber nicht schließen, dass $\arcsin x = -\arccos x$; hingegen gilt $\arcsin x = \pi/2 - \arccos x$.

Eine Funktion, für die man eine Formel schreiben kann, in der nur die Funktionen exp, log, sin, cos, die gewöhnlichen arithmetischen Verknöpfungen und Wurzeln auftauchen, heißt eine *elementare Funktion*. (Wir versuchen hier nicht, eine genaue Definition zu formulieren. Siehe Behrends, *Analysis 2*, §6.6.)

Aus den Rechenregeln für Ableitungen und der Kettenregel, ist es klar, wie man jede elementare Funktion ableiten kann; die Ableitung ist wieder elementar. Hingegen kann

es sehr schwierig sein, eine Stammfunktion zu finden; die Stammfunktion einer elementaren Funktion ist nicht immer elementar. Positiv ausgedrückt, liefert uns Integration viele neue Funktionen. Inzwischen haben hunderte solcher *speziellen Funktionen* ihren eigenen Namen. Formelsammlungen dazu findet man in dicken Büchern oder auch jetzt im Web (z.B. `functions.wolfram.com`). Als Beispiel nennen wir die *(Gauß'sche) Fehlerfunktion*

$$\operatorname{erf}(x) := \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt,$$

die sehr wichtig in der Statistik ist.

`Ende der Vorlesung 2008 Oktober 23`

A6. Integrationstechniken

Zwei ganz wichtige Integrationstechniken sind einfache Umformulierungen der Kettenregel bzw. der Produktregel für Ableitungen.

Satz A6.1 (Substitutionsregel). *Sei F eine Stammfunktion für eine stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$. Weiter sei $t\colon [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar und streng monoton. Dann ist $F \circ t$ eine Stammfunktion für $(f \circ t)\, t'$ und es gilt,*

$$\int_a^b f(t(x))\, t'(x)\, dx = F(t(b)) - F(t(a)) = \int_{t(a)}^{t(b)} f(t)\, dt$$

Beweis. Die Kettenregel gibt $(F \circ t)' = (f \circ t)\, t'$; die letzte Formel folgt dann aus dem Hauptsatz. □

Bemerkung A6.2. Hoffentlich ist es nicht verwirrend sondern sogar hilfreich, dass wir in der letzten Formel t nicht nur als Namen der Funktion benutzt haben, sondern auch als Integrationsvariable. Natürlich kann man auch eine beliebige Variable benutzen, etwa $\int_{t(a)}^{t(b)} f(\zeta)\, d\zeta$. Natürlich geht es auch ohne: $\int_{t(a)}^{t(b)} f$ bedeutet dasselbe.

Beispiel A6.3. Wir haben schon angedeutet, das Integral $\int e^{-x^2}\, dx$ lässt sich nicht als elementare Funktion ausdrücken, sonder liefert die neue Fehlerfunktion $\operatorname{erf}(x)$. Hingegen lässt sich das anscheiend kompliziertere Integral $\int x e^{-x^2}\, dx$ mithilfe der Substitutionsregel leicht berechnen. Der Faktor e^{-x^2} ist eine Verkettung; wenn wir $t(x) = -x^2$ und $f = \exp$ (mit Stammfunktion $F = \exp$) ausprobieren, finden wir

$$\int (-2x) e^{-x^2}\, dx = e^{-x^2}.$$

Damit ist unser Integral $-e^{-x^2}/2$.

Satz A6.4 (Partielle Integration). *Seien $u, v\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt*

$$\int u\, v' = uv - \int u' v, \qquad \int_a^b u\, v' = uv\Big|_a^b - \int_a^b u' v.$$

Beweis. Die Funktion $u\, v' + u' v$ hat Stammfunktion uv. □

Die Schwierigkeit besteht darin, dass es nicht immer klar ist, wie man Funktionen f, t bzw. u, v wählen sollte, um einen gegebenen Integranden in die Form $(f \circ t)\, t'$ bzw. $u\, v'$ vernünftig umzuschreiben.

Beispiel A6.5. Wollen wir $\int e^x x\, dx$ bestimmen und wählen wir $u = e^x$, $v' = x$, hilft das nicht: es taucht ein „komplizierteres" Integral $\int e^x x^2\, dx$ auf. Wählen wir hingegen $u = x$, $v' = e^x$, finden wir,

$$\int x e^x\, dx = x e^x - \int 1 e^x\, dx = (x-1) e^x.$$

Beispiel A6.6. Für $\int \sqrt{1-x^2}\, dx$ hilft (vielleicht erstaunlicherweise) die Wahl $v' = 1$ (und noch ein bisschen Tricksen):

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2}\, 1\, dx &= x\sqrt{1-x^2} - \int x \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} - \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\, dx \\ &= x\sqrt{1-x^2} - \arccos x - \int \sqrt{1-x^2}\, dx.\end{aligned}$$

Damit gilt

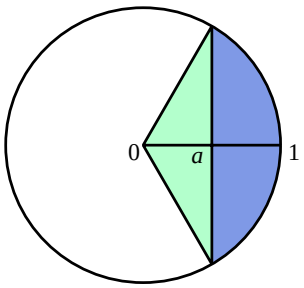
$$2 \int \sqrt{1-x^2}\, dx = x\sqrt{1-x^2} - \arccos x$$

zunächst auf jedem kompakten Teilintervall von $(-1,1)$. D.h., es gilt auf $(-1,1)$ aber dann (weil beide Seiten stetig sind) auch in den Endpunkten, d.h. auf dem ganzen Intervall $[-1,1]$.

Beispiel A6.7. Diese Formel hat eine schöne geometrische Interpretation als Flächeninhalt eines Kreissegments. Für das Integral auf $[a,1]$ haben wir

$$\begin{aligned}2 \int_a^1 \sqrt{1-x^2}\, dx &= x\sqrt{1-x^2}\Big|_a^1 - \arccos x\Big|_a^1 \\ &= -a\sqrt{1-a^2} + \arccos a.\end{aligned}$$

Der Flächeninhalt eines Kreissegments ist der Flächeninhalt eines Kreissektors ($\arccos a$) minus der Flächeninhalt eines Dreiecks ($a\sqrt{1-a^2}$).



Für $a = -1$ finden wir, dass der Flächeninhalt des Einheitskreises π ist. Das heißt, unsere Definition von π (im letzten Semester als das 2-fache einer Nullstelle von der Potenzreihe cos) stimmt mit der geometrischen Definition überein.

Beispiel A6.8. Dieses Integral kann man auch einfach mit der Substitutionsregel berechnen. Sieht man $\sqrt{1-x^2}$, darf man immer hoffen, dass $\theta = \arcsin x$ hilfreich ist. Damit gilt $x = \sin\theta$, $\sqrt{1-x^2} = \cos\theta$ und $dx = \cos\theta\, d\theta$. Das ergibt

$$\int \sqrt{1-x^2}\, dx = \int \cos^2\theta\, d\theta.$$

Wenn man sich daran erinnert, dass $2\cos^2\theta = 1 + \cos 2\theta$, hat man

$$2\int \cos^2\theta\, d\theta = \theta + \frac{1}{2}\sin 2\theta = \theta + \sin\theta\cos\theta.$$

Satz A6.9. *Die Zahl π ist irrational.*

Der erste Beweis dafür wurde schon im 18. Jahrhundert gefunden. Wir stellen einen Beweis dar, den Ivan Niven 1947 nur auf einer einzigen Seite veröffentlicht hat.

Beweis. Angenommen, es sei $\pi = {}^{a}\!/_{b}$ mit $a, b \in \mathbb{N}^+$. Für ein $n \in \mathbb{N}$, das wir erst später wählen, definieren wir das Polynom

$$f(x) := \frac{x^n(a-bx)^n}{n!} = \frac{b^n}{n!}(x(\pi - x))^n,$$

in dem nur Monome von Grad zwischen n und $2n$ auftauchen. Die Koeffizienten von $n!\,f(x)$ sind ganze Zahlen. Deshalb gilt $f^{(j)}(0) = 0$ für $j < n$ bzw. $j > 2n$; für $n \le j \le 2n$ ist $f^{(j)}$ eine ganze Zahl. Das heißt, in 0 ist jede Ableitung von f eine ganze Zahl. Dasselbe gilt in π, weil $f(\pi - x) = f(x)$.

Wir definieren nun ein zweites Polynom

$$F(x) := \sum_{j=0}^{n} (-1)^j f^{(2j)}(x) = f(x) - f''(x) + \cdots \pm f^{(2n)}(x).$$

Dabei merken wir, dass $F(0)$ und $F(\pi)$ ganze Zahlen sind. Die Funktion $G(x) := F'(x)\sin x - F(x)\cos x$ hat die Ableitung

$$G'(x) = (F''(x) + F(x))\sin x = f(x)\sin x.$$

Aus dem Hauptsatz folgt dann, dass

$$\int_0^\pi f(x)\sin x\, dx = G(x)\Big|_0^\pi = F(\pi) + F(0).$$

D.h., dieses Integral ist eine ganze Zahl. Für $0 < x < \pi$ gelten $0 < \sin x \le 1$ und $0 < n!\,f(x) < a^n\pi^n$. Deshalb gilt $0 < f(x)\sin x < a^n\pi^n/n!$. Jetzt wählen wir n groß genug, dass Letzteres kleiner als ${}^{1}\!/_{\pi}$ ist. Damit gilt $0 < \int_0^\pi f(x)\sin x\, dx < 1$, ein Widerspruch. □

Bemerkung A6.10. Wie konnte Niven diesen Beweis finden? Will man das Integral $\int f(x)\sin x\, dx$ berechnen, kann man partielle Integration (insgesamt $(2n+2)$-mal) anwenden und es kommt daraus die Formel für F bzw. G.

Ende der Vorlesung 2008 Oktober 27

A7. Uneigentliche Integrale

Per Definition ist eine Regelfunktion beschränkt und auf einem kompakten Intervall definiert. Oft will man auch unbeschränkte Funktionen bzw. Funktionen auf unendlinchen Intervallen integrieren. Darum definiert man das „uneigentliche Integral“ als Grenzwert.

Definition A7.1. Sei $[a,b) \subset \mathbb{R}$ ein halboffenes Intervall, wobei $b = +\infty$ erlaubt ist. Weiter sei $f\colon [a,b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgender Eigenschaft: für jedes $c \in [a,b)$ ist die Einschränkung $f|_{[a,c]}$ eine Regelfunktion. Wir definieren das *uneigentliche Integral* als

$$\int_a^b f := \lim_{c\to b^-} \int_a^c f,$$

falls dieser Grenzwert existert.

Beispiel A7.2.

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c\to+\infty} \int_0^c \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{c\to+\infty} \arctan x\Big|_0^c = \lim_{c\to+\infty} \arctan c = \frac{\pi}{2}.$$

Beispiel A7.3. Für $\alpha > 1$ gilt $\int_1^\infty {}^{dx}\!/_{x^\alpha} = {}^{1}\!/_{(\alpha-1)}$. Für $\alpha \le 1$ existiert das Integral nicht (bzw. ist $+\infty$).

Bemerkung A7.4. Ähnliches gilt für eine Funktion auf $(a,b]$: wir setzten $\int_a^b f := \lim_{c\to a^+} \int_c^b f$. Für eine Funktion auf (a,b) wählen wir ein beliebiges $p \in (a,b)$ und setzen

$$\int_a^b f := \int_a^p f + \int_p^b f,$$

falls diese letzten beiden uneigentlichen Integrale existieren.

Beispiel A7.5. Für $\alpha \in (0,1)$ gilt $\int_0^1 {}^{dx}\!/_{x^\alpha} = {}^{1}\!/_{(1-\alpha)}$. Das Integral $\int_0^\infty {}^{dx}\!/_{x^\alpha}$ existiert (in $\mathbb{R}$) für kein $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beispiel A7.6. Man kann zeigen (am besten mit mehrdimensionalen Integralen), dass $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}$.

Beispiel A7.7. Das Integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x\, dx$ existiert nicht, obwohl

$$\lim_{c\to+\infty} \int_{-c}^{c} x\, dx = 0.$$

A8. Weitere Integrale

Wir haben das Integral zunächst für Regelfunktionen definiert und dann auf uneigentliche Integrale erweitert. Wir haben auch schon das Riemann-Integral erwähnt. Jetzt wollen wir diese und andere Integrale vergleichen. (Hier verzichten wir größtenteils auf Beweise.)

Beispiel A8.1. Sei (a_j) eine Folge in $\mathbb{R}$. Wir definieren wie folgt eine Funktion $f^a\colon [0,1] \to \mathbb{R}$:

$$f^a(x) := \begin{cases} 0, & x = 0, \\ a_j, & x \in (2^{-j-1}, 2^{-j}], \quad j \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Die Einschränkung von f^a auf ein beliebiges Teilintervall $[b, 1]$ (für $b > 0$) ist eine Treppenfunktion. Die Funktion f^a selbst ist genau dann eine Treppenfunktion, wenn (a_j) „am Ende konstant“ ist, d.h., wenn es $a \in \mathbb{R}$ so gibt, dass $a_j = a$ für fast alle j. Sie ist genau dann eine Regelfunktion, wenn (a_j) einen Grenzwert (in $\mathbb{R}$) hat. (Was sind dann die approximierende Treppenfunktionen?) Sie ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn (a_j) begrenzt ist.

Beispiel A8.2. Für $(a_j) = (0, 1, 0, 1, \ldots)$ ist f^a Riemann-integrierbar obwohl keine Regelfunktion. Das Integral kann man berechnen:

$$\int_0^1 f^a = \sum_{k=1}^{\infty} 4^{-k} = \frac{1}{3}.$$

Dieses ist entweder als uneigentliches Regelintegral oder als (eigentliches) Riemann-Integral zu verstehen.

Für $b_j = j$ ist f^b nicht mal Riemann-integrierbar (weil nicht beschränkt). Trotzdem existiert das uneigentliche (Regel- oder Riemann-) Integral:

$$\int_0^1 f^b = \sum_{j=0}^{\infty} j 2^{-j-1} = 1.$$

Für $c_j = (-2)^j$ existiert das Integral $\int_0^1 f^c$ in keinem vernünftigen Sinne. Es gilt

$$\int_{2^{-j}}^1 f^c = \frac{1}{4}(1 + (-1)^j).$$

Das heißt, diese Integrale sind alternierend $1/2$ und 0.

Definition A8.3. Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine (beschränkte) Funktion. Die *obere* bzw. *untere Summe* von f bezüglich einer Zerlegung Z von $[a, b]$ ist:

$$\overline{S}(f, Z) := \sum_j \Delta z_j \sup_{x \in [z_{j-1}, z_j]} f(x).$$
$$\underline{S}(f, Z) := \sum_j \Delta z_j \inf_{x \in [z_{j-1}, z_j]} f(x).$$

Das *obere* bzw. *untere Integral* von f ist

$$\overline{\int_a^b} f := \inf_Z \overline{S}(f, Z) = \lim_{\Delta(Z) \to 0} \overline{S}(f, Z)$$
$$\underline{\int_a^b} f := \sup_Z \underline{S}(f, Z) = \lim_{\Delta(Z) \to 0} \underline{S}(f, Z).$$

Satz A8.4. *Eine Funktion f ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn $\overline{\int_a^b} f = \underline{\int_a^b} f$.* □

Satz A8.5. *Eine Regelfunktion hat abzählbar viele Unstetigkeiten.*

Beweisskizze. Sei f der gleichmäßige Grenzwert von Treppenfunktionen φ_n. Ist p ein Punkt, in dem jedes φ_n stetig ist, dann ist f in p stetig. (Warum?) Jedes φ_n hat aber nur endlich viele Unstetigkeiten. □

Beispiel A8.6. Die Regelfunktion W aus Beispiel A2.11 hat abzählbar unendlich viele Unstetigkeiten (in den rationalen Zahlen). Die Unstetigkeiten der Funktion f^a aus A8.2 sind abzählbar obwohl f^a keine Regelfunktion ist.

Satz A8.7. *Eine beschränkte Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn die Unstetigkeiten von f eine Nullmenge (vgl. I.G2.2) bilden.* □

Beispiel A8.8. Die Funktion $\chi_{\mathbb{Q}}$ ist nicht Riemann-integrierbar, weil sie in jedem Punkt unstetig ist. Sie ist aber 0 außer der abzählbaren Nullmenge $\mathbb{Q}$.

Lebesgue hat eine allgemeinere Definition für das Integral gefunden, die keine Nullmengen berücksichtigt. Falls f Lebesgue-integrierbar ist und $f = g$ fast überall (d.h., außer in einer Nullmenge), dann ist g auch integrierbar und es gilt $\int f = \int g$. Wir haben z.B. $\int_0^1 \chi_{\mathbb{Q}} = \int_0^1 0 = 0$. Das Lebesgue-Integral basiert auf Maßtheorie, welche wir hier nicht erklären können.

Noch allgemeiner ist das sogenannte Gauge-Integral (von Henstock, Kurzweil und anderen). Dieses kann man leicht mit Zerlegungen definieren.

Definition A8.9. Sei $g\colon [a, b] \to (0, +\infty)$ eine beliebige positive Funktion, die wir ein *Gauge* nennen. Eine markierte Zerlegung $\dot{Z}$ von $[a, b]$ heißt dann *g-fein*, wenn $\Delta z_j < g(\zeta_j)$ für jedes j.

Definition A8.10. Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Funktion und sei $I \in \mathbb{R}$. Wir sagen, I ist das *Gauge-Integral* von f auf $[a, b]$, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ es ein Gauge g auf $[a, b]$ so gibt, dass für jede g-feine markierte Zerlegung $\dot{Z}$ gilt

$$\left| I - S(f, \dot{Z}) \right| < \varepsilon.$$

Bemerkung A8.11. Der Fall, wo es (zu jedem ε) ein konstantes Gauge $g \equiv \delta > 0$ gibt, ist genau die Definition vom Riemann-Integral.

Bemerkung A8.12. Wenn man mit dem Gauge-Integral anfängt, muss man keine Erweiterung auf uneigentliche Integrale betrachten.

Satz A8.13. *Jede Funktion, die ein Lebesgue-Integral oder ein (auch uneigentliches) Riemann-Integral hat, ist Gauge-integrierbar. Eine Funktion f ist genau dann Lebesgue-integrierbar, wenn f und $|f|$ Gauge-integrierbar sind.* □

Ende der Vorlesung 2008 Oktober 30