B. METRISCHE RÄUME

B1. Definition

Definition B1.1. Sei X eine Menge. Eine Funktion oder Abbildung $d\colon X \times X \to \mathbb{R}$ heißt dann eine *Metrik* auf X, falls für alle $x, y, z \in X$ die folgenden (axiomatischen) Bedingungen erfüllt sind:

- Definitheit: $d(x,y) = 0 \iff x = y$,
- Symmetrie: $d(x,y) = d(y,x)$,
- Dreiecksungleichung: $d(x,z) \le d(x,y) + d(y,z)$.

Wir sagen, X mit der Metrik d ist ein *metrischer Raum* (X,d). (Wenn klar ist, welche Metrik gemeint ist, schreiben wir oft einfach X für den metrischen Raum (X,d).)

Lemma B1.2. *In einem metrischen Raum (X,d) gilt $d(x,y) \ge 0$ für alle $x, y \in X$.*

Beweis. Wir nehmen $z = x$ in der Dreiecksungleichung. Mit Definitheit und Symmetrie gilt dann

$$0 = d(x,x) \le d(x,y) + d(y,x) = 2d(x,y). \qquad \square$$

Beispiel B1.3. Die *Standardmetrik* auf den reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist $d(x,y) := |x - y|$.

Definition B1.4. Sei X eine beliebige Menge. Die *diskrete Metrik* auf X ist

$$d(x,y) := \begin{cases} 0, & x = y, \\ 1, & x \ne y. \end{cases}$$

(Offensichtlich gelten Definitheit und Symmetrie. Die Dreiecksungleichung muss man in Fällen betrachten. Es gilt z.B. $1 \le 1 + 1$ im Fall, wo x, y, z alle unterschiedlich sind.)

Bemerkung B1.5. Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $Y \subset X$ eine beliebige Teilmenge. Dann ist (Y,d) auch ein metrischer Raum, ein *Unterraum* von X. (Streng gesehen müssten wir $(Y, d|_{Y\times Y})$ schreiben.) Dies ist klar, weil die drei Bedingungen nicht nur für alle Punkte in Y sondern schon für alle Punkte in X erfüllt sind.

Die Standardmetrik auf $\mathbb{R}$ passt mit der Körperstruktur zusammen im Sinne, dass $d(x+a, y+a) = d(x,y)$ und $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x,y)$. Auf einem Vektorraum V sind die wichtigsten Metriken diejenigen, die ähnliche Eigenschaften haben, weil sie aus einer Norm auf V entstehen. Die Definition einer Norm ähnelt der Definition einer Metrik, wie wir gleich sehen.

Definition B1.6. Sei V ein (reeller) Vektorraum. Eine Funktion $\|\cdot\|\colon V \to \mathbb{R}$ heißt eine *Norm* auf V, falls für alle $v, w \in V$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

- Definitheit: $\|v\| = 0 \iff v = 0$,
- Homogenität: $\|\lambda v\| = |\lambda|\, \|v\|$,
- Dreiecksungleichung: $\|v + w\| \le \|v\| + \|w\|$.

Lemma B1.7. *Jeder normierte Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein metrischer Raum mit der Metrik $d(v,w) := \|v - w\|$.*

Beweis. (Aufgabe.) $\square$

Bemerkung B1.8. Im Lemma braucht man Homogenität nur im Falle $\lambda = -1$.

Definition B1.9. Sei $n \in N$. Auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definieren wir für jedes $p \in [1, \infty)$ die *ℓ^p-Norm* $\|\cdot\|_p$ durch

$$\big\|(x_1, \dots, x_n)\big\|_p := \sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p}.$$

Für $p = \infty$ definieren wir die *ℓ^∞-Norm* durch

$$\big\|(x_1, \dots, x_n)\big\|_\infty := \max_i |x_i|.$$

Bemerkung B1.10. Für jedes $x \in \mathbb{R}^n$ ist $p \mapsto \|x\|_p$ eine stetige Abbildung $(1, \infty) \to \mathbb{R}$ und es gilt $\|x\|_p \to \|x\|_\infty$ für $p \to \infty$.

Satz B1.11 (Hölder'sche Ungleichung). *Seien $1 < p, q < \infty$ mit $1/p + 1/q = 1$ und seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Es gilt*

$$\sum_1^n |v_i w_i| \le \|v\|_p \, \|w\|_q.$$

Beweis. (Aufgabe.) $\square$

Korollar B1.12. *Sei $1 < p < \infty$ und seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Es gilt*

$$\sum_1^n |a_i|\, |b_i|^{p-1} \le \|a\|_p \left(\|b\|_p\right)^{p-1}.$$

Beweis. Wir setzen $1/q := 1 - 1/p$ und definieren $v, w \in \mathbb{R}^n$ durch $v := a$ und $w_i := |b_i|^{p-1}$. Wegen $p/q = p - 1$ ist die Hölder'sche Ungleichung in diesem Fall genau die Gewünschte. $\square$

Satz B1.13. *Die ℓ^p-Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist für jedes $p \in [1, \infty]$ eine Norm.*

Beweis. Definitheit und Homogenität sind klar. Wir betrachten die Dreiecksungleichung im Falle $p \in (1, \infty)$, und lassen $p = 1$ und $p = \infty$ als Aufgaben. Seien $v, w \in \mathbb{R}^n$. Wir müssen zeigen, $\|v + w\|_p \le \|v\|_p + \|w\|_p$. Mit $b := v + w$ gilt

$$(\|b\|_p)^p = \sum |b_i|\, |b_i|^{p-1} \le \sum |v_i|\, |b_i|^{p-1} + \sum |w_i|\, |b_i|^{p-1}.$$

Jetzt wenden wir das Korollar zweimal an:

$$\cdots \le \|v\|_p \, (\|b\|_p)^{p-1} + \|w\|_p \, (\|b\|_p)^{p-1}.$$

Wenn wir durch $(\|b\|_p)^{p-1}$ teilen, folgt die gewünschte Ungleichung $\|b\|_p \le \|v\|_p + \|w\|_p$. $\square$

Bemerkung B1.14. Man kann natürlich $\|v\|_p$ mittels der selben Formel auch für $0 < p < 1$ definieren; die Dreiecksungleichung gilt dann aber nicht.

Bemerkung B1.15. Im Falle $n = 1$ gilt $\|x\|_p = |x|$ für jedes $0 < p \le \infty$.

Definition B1.16. Der n-dimensionale *euklidische Raum* $\mathbb{E}^n$ ist $\mathbb{R}^n$ mit der euklidischen Metrik $d(x,y) = \|x - y\|_2$.

B2. Folgen in einem metrischen Raum

Wir betrachten jetzt Folgen in einem metrischen Raum (X, d). Im letzten Semester (I.B3, I.B6) haben wir Konvergenz, Grenzwerte, Cauchyfolgen usw. für Folgen in $\mathbb{R}$ (oder in einem anderen angeordneten Körper) betrachtet. Hier müssen wir nur $|x - y|$ in $d(x, y)$ umschreiben, sonst bleibt alles wie damals.

Definition B2.1. [Vgl. I.B3.1.] Sei (a_n) eine Folge im metrischen Raum (X, d). Die Folge *konvergiert* gegen $x \in X$ (geschrieben $a_n \to x$), falls für jedes $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ gilt $d(a_n, x) < \varepsilon$ für fast alle n. Das heißt,

$$a_n \to x \iff \forall \varepsilon > 0 \ \exists n_0 \ \forall n \geq n_0 \ \ d(a_n, x) < \varepsilon.$$

Lemma B2.2. [Vgl. I.B3.4.] *Falls $a_n \to x$ und $a_n \to y$, dann folgt $x = y$.*

Beweis. Falls $x \neq y$, setzen wir $\varepsilon := {}^{d(x,y)}/_2$. Aus Definitheit folgt $\varepsilon > 0$. Deshalb können wir n groß genug wählen, dass $d(a_n, x) < \varepsilon$ und $d(a_n, y) < \varepsilon$. Dann widerspricht $d(a_n, x) + d(a_n, y) < 2\varepsilon = d(x, y)$ der Dreiecksungleichung. □

Definition B2.3. [Vgl. I.B3.5.] Falls $a_n \to x$, dann heißt x der *Limes* oder *Grenzwert* der Folge (a_n). Wir schreiben

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim a_n = x.$$

Beispiel B2.4. [Vgl. I.B3.6.1.] Sei (a_n) *am Ende konstant*, d.h., es gibt $x \in X$ so, dass $a_n = x$ für fast alle n. Dann konvergiert $a_n \to x$.

Lemma B2.5. *Sei d die diskrete Metrik auf einer Menge X und sei (a_n) eine Folge in X. Die Folge (a_n) konvergiert genau dann, wenn sie am Ende konstant ist.*

Beweis. Wir nehmen an, $a_n \to x$, und wählen $\varepsilon \leq 1$. Dann gilt $d(x, a_n) < \varepsilon$ für fast alle n. Für die diskrete Metrik gilt $d(x, y) < 1$ nur dann, wenn $x = y$. Das heißt, wir haben $x = a_n$ für fast alle n. □

Ende der Vorlesung 2008 November 3

Definition B2.6. [Vgl. I.B6.1.] Eine Folge (a_n) in einem metrischen Raum (X, d) heißt dann *Cauchyfolge*, wenn

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n, m \geq n_0 \quad d(a_m, a_n) < \varepsilon.$$

Die folgenden Aussagen haben genau dieselben Beweise wie im letzten Semester.

Lemma B2.7. [Vgl. I.B6.2.] *Eine Folge (a_n) ist genau dann eine Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $x \in X$ so gibt, dass $d(x, a_n) < \varepsilon$ für fast alle n.* □

Korollar B2.8. [Vgl. I.B6.4,5.] *Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge. Hat eine Cauchyfolge eine konvergente Teilfolge, so ist sie selbst konvergent.* □

Definition B2.9. [Vgl. I.B8.6.] Ein metrischer Raum (X, d) heißt dann *vollständig*, falls jede Cauchyfolge aus X gegen ein $x \in X$ konvergiert.

Beispiel B2.10. Die euklidische Gerade $\mathbb{E}^1$ (d.h., die reellen Zahlen mit der Standardmetrik) ist vollständig. Die Teilmengen $\mathbb{Q}$ und $(0, 1)$ sind nicht vollständig. Jeder diskrete metrische Raum ist vollständig.

Bemerkung B2.11. Es ist natürlich sehr wichtig, dass der Grenzwert im Raum X liegt. Wenn wir nur von einem Raum X reden, könnte man zurecht fragen „wo sonst?“. In vielen Fällen ist es aber verlockend, einen nicht vollständigen Raum X als Unterraum von einem größerem Raum zu sehen, wo ein Grenzwert doch existiert. Eigentlich geht das immer: man kann jeden metrischen Raum X *vervollständigen*, genau wie wir im letzten Semester $\mathbb{R}$ aus $\mathbb{Q}$ konstruierten.

B3. Offene Mengen

Definition B3.1. [Vgl. I.D1.1.] Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $\varepsilon > 0$ und $x \in X$ heißt

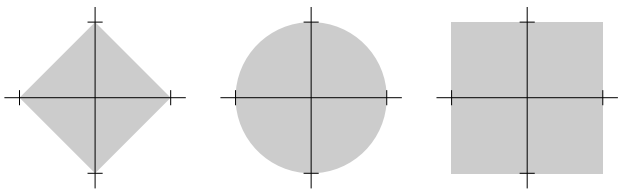
$$B_\varepsilon(x) := \{p \in X : d(x, p) < \varepsilon\}$$

der (offene) *ε-Ball um x* oder die *ε-Umgebung von x* in X.

Definition B3.2. [Vgl. I.D1.2.] Seien (X, d) ein metrischer Raum und $U \subset X$ eine Teilmenge. Ein Punkt $p \in U$ heißt ein *innerer Punkt von U*, falls es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $B_\varepsilon(p) \subset U$. Die Teilmenge U heißt *offen* (in X), falls jeder Punkt $p \in U$ ein innerer Punkt ist. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *abgeschlossen*, falls das Komplement $X \setminus A$ offen ist.

Beispiel B3.3. Sei d die diskrete Metrik auf einer Menge X. Für jedes $x \in X$ gilt $B_\varepsilon(x) = \{x\}$ für $\varepsilon \leq 1$ und $B_\varepsilon(x) = X$ für $\varepsilon > 1$. Jedes $U \subset X$ ist offen und auch abgeschlossen.

Beispiel B3.4. Betrachten wir $\mathbb{R}^2$ mit drei verschiedenen Metriken (aus den ℓ^1-, ℓ^2- und ℓ^∞-Normen), hat der Ball $B_1(0)$ drei verschiedene Gestalten. Offene Mengen bezüglich der drei Metriken sind aber dieselben, wie wir später erfahren.



Beispiel B3.5. Sei $X = [-1, 1)$ mit der Metrik induziert aus der Standardmetrik auf $\mathbb{R}$. Dann ist $A = [-1, 0)$ offen in X (obwohl nicht in $\mathbb{R}$). Das Komplement $X \setminus A = [0, 1)$ ist dann abgeschlossen in X (obwohl nicht in $\mathbb{R}$).

Lemma B3.6. [Vgl. I.D1.3.] *Jeder Ball $B_\varepsilon(x)$ ist offen.*

Beweis. Zu $p \in B_\varepsilon(x)$ setzen wir $\delta := \varepsilon - d(p, x)$. Dann gilt $B_\delta(p) \subset B_\varepsilon(x)$, weil für $q \in B_\delta(p)$ aus der Dreiecksungleichung folgt

$$d(q, x) \leq d(q, p) + d(p, x) < \delta + d(p, x) = \varepsilon. \qquad \square$$

Lemma B3.7. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Die offenen Teilmengen von X haben folgende Eigenschaften:*

- *X und $\varnothing$ sind offen.*
- *Sind U und U' offen in X, so ist auch $U \cap U'$ offen.*
- *Ist A eine Indexmenge und ist U_α offen für jedes $\alpha \in A$, so ist auch $\bigcup_\alpha U_\alpha$ offen.*

Beweis. Die leere Menge ist offen, weil es kein $x \in \varnothing$ nachzuprüfen gibt; der ganze Raum X ist offen, weil X jeden Ball enthält.

Für $x \in U \cap U'$ haben wir $B_\delta(x) \subset U$ und $B_{\delta'}(x) \subset U'$. Mit $\varepsilon := \min(\delta, \delta')$ gilt dann $B_\varepsilon(x) \subset U \cap U'$.

Ein Punkt $x \in \bigcup U_\alpha$ liegt in mindestens einem U_β. Dann gibt es einen Ball $B_\varepsilon(x) \subset U_\beta \subset \bigcup U_\alpha$. □

Bemerkung B3.8. Sei X eine Menge. Eine *Topologie* auf X ist eine Entscheidung, welche Teilmengen $U \subset X$ für *offen* erklärt werden, wobei die drei Eigenschaften aus Lemma B3.7 gelten müssen. Das Lemma sagt, jede Metrik induziert eine Topologie, jeder metrische Raum ist auf natürliche Weise ein topologischer Raum. (Es gibt auch Topologien – z.B. diejenige, wo nur $\varnothing$ und X offen sind –, die von keiner Metrik induziert sind.)

Die folgenden beiden Bemerkungen zeigen, dass die Begriffe „innerer Punkt“ und „Konvergenz“ *topologisch* sind, im Sinne, dass wir diese mittels offener Mengen hätten definieren können. (Für beide Begriffe hatten wir zunächst ähnliche Definitionen gegeben, die aber nur den Fall $U = B_\varepsilon(x)$ betrachteten.)

Bemerkung B3.9. Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $T \subset X$. Ein Punkt $p \in T$ ist genau dann ein innerer Punkt von T, wenn es ein offenes U in X gibt mit $p \in U \subset T$.

Bemerkung B3.10. Eine Folge (a_n) in einem metrischen Raum (X, d) konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn für jedes offene $U \subset X$ mit $x \in U$ gilt $a_n \in U$ für fast alle n.

Definition B3.11. [Vgl. I.D1.4.] Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Punkt $p \in X$ heißt *Randpunkt* der Teilmenge $T \subset X$, falls p weder ein innerer Punkt von T noch vom Komplement $X \setminus T$ ist. Der *Rand von T* ist die Menge $\partial T \subset X$ aller Randpunkte von T.

Lemma B3.12. [Vgl. I.D1.5.] *Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen, wenn $\partial A \subset A$.* □

`Ende der Vorlesung 2008 November 6`

Lemma B3.13. *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für $p \in X$ und $\varepsilon > 0$ gilt*

$$\partial B_\varepsilon(p) \subset \{x \in X : d(x, p) = \varepsilon\}.$$

Beispiel B3.14. Oft (z.B. in jeder aus einer Norm induzierten Metrik) gilt hier Gleichheit. Das ist aber bei weitem nicht immer der Fall: mit der diskreten Metrik z.B. ist $\partial B_1(p)$ leer, obwohl $d(x, p) = 1$ für alle $x \neq p$.

Beweis. Falls $d(x, p) < \varepsilon$, wissen wir schon, x ist innerer Punkt von $B_\varepsilon(p)$, d.h. kein Randpunkt. Falls $d(x, p) > \varepsilon$, setzen wir $\delta = d(x, p) - \varepsilon$; aus der Dreiecksungleichung folgt, $B_\delta(x) \cap B_\varepsilon(p) = \varnothing$, d.h., x ist innerer Punkt vom Komplement. Es bleiben nur die Punkte x mit $d(x, p) = \varepsilon$ als mögliche Randpunkte. □

B4. Äquivalente Metriken

Definition B4.1. Seien d und d' zwei Metriken auf einer Menge X. Wir sagen, d und d' sind *äquivalent*, $d \sim d'$, falls zu jedem $x \in X$ und jedem $\varepsilon > 0$ es positive Zahlen $\delta, \delta' > 0$ so gibt, dass

$$B_{\delta'}(x) \subset B'_\varepsilon(x), \quad B'_\delta(x) \subset B_\varepsilon(x).$$

Lemma B4.2. *Diese Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation auf der Familie aller Metriken auf X.*

Beweisskizze. Die Definition ist offensichtlich symmetrisch in d und d'. Reflexivität ($d \sim d$) folgt mit $\delta = \delta' = \varepsilon$. Zur Transitivität nehmen wir an, dass $d \sim d' \sim d''$; wir wollen zeigen, $d \sim d''$. Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir zunächst $\delta > 0$ und zu δ danach $\delta' > 0$ so, dass

$$B''_{\delta'}(x) \subset B'_\delta(x) \subset B_\varepsilon(x).$$ □

Satz B4.3. *Zwei Metriken d und d' auf X sind genau dann äquivalent, wenn sie dieselbe Topologie auf X induzieren, d.h., wenn für jede Teilmenge $U \subset X$ gilt,*

$$U \text{ offen in } (X, d) \iff U \text{ offen in } (X, d').$$

Beweis. Sei $d \sim d'$ und sei U offen in (X, d). Zu jedem $x \in U$ gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(x) \subset U$. Zu diesem ε gibt es $\delta > 0$ so, dass $B'_\delta(x) \subset B_\varepsilon(x) \subset U$. Weil $x \in U$ beliebig war, heißt das, U ist offen in (X, d').

Umgekehrt, seien d und d' zwei Metriken mit denselben offenen Mengen. Für jedes $x \in X$ und jedes $\varepsilon > 0$ ist der Ball $U := B_\varepsilon(x)$ offen in (X, d) und deshalb auch in (X, d'). Insbesondere heißt das, es gibt $\delta > 0$ so, dass $B'_\delta(x) \subset U = B_\varepsilon(x)$. Ähnlich gibt es auch δ' so, dass $B_{\delta'}(x) \subset B'_\varepsilon(x)$. Das bedeutet, $d \sim d'$. □

Bemerkung B4.4. Dieses Lemma bedeutet, wenn wir eine Metrik d mit einer äquivalenten Metrik d' ersetzen, bleiben alle topologischen Begriffe (offen, abgeschlossen, kompakt, konvergent, stetig, usw.) unverändert.

Lemma B4.5. *Alle Metriken auf einer endlichen Menge sind äquivalent.*

Beweis. Sei X eine endliche Menge und sei d eine Metrik auf X. Wir zeigen, d ist zur diskreten Metrik d' äquivalent; aus Transitivität folgt das Lemma.

Sei nun $x \in X$. Wir setzen

$$\delta := \min\{d(y, x) : x \neq y \in X\} > 0.$$

(Hier benutzen wir, dass X endlich ist: nur deshalb können wir Minimum anstelle von Infimum schreiben; daraus folgt die Positivität.) Es folgt, $B_\delta(x) = \{x\} = B'_1(x)$. Deshalb gilt

$$B_\delta(x) \subset B'_\varepsilon(x), \quad B'_1(x) \subset B_\varepsilon(x).$$

für alle $\varepsilon > 0$. □

Satz B4.6. *Seien $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|'$ zwei Normen auf einem Vektorraum V. Die beiden induzierten Metriken auf V sind genau dann äquivalent, wenn es $\lambda \geq 1$ so gibt, dass für alle $v \in V$ gilt*

$$1/\lambda \, \|v\| \leq \|v\|' \leq \lambda \|v\|.$$

Beweisskizze. Gibt es ein solches λ, können wir in der Definition von Äquivalenz einfach $\delta = \delta' = \varepsilon/\lambda$ wählen.

Umgekehrt, falls die Metriken äquivalent sind, heißt das insbesondere, es gibt ε so, dass $B'_\varepsilon(0) \subset B_1(0)$ und $B_\varepsilon(0) \subset B'_1(0)$. Wir setzen $\lambda := 1/\varepsilon$. Aus Homogenität folgt die gewünschte Ungleichung. □

Lemma B4.7. *Auf $\mathbb{R}^n$ sind alle ℓ^p-Normen ($1 \leq p \leq \infty$) in diesem Sinne äquivalent.*

Beweis. Wegen Transitivität reicht es aus zu zeigen, dass für jedes p die ℓ^p-Norm und die ℓ^∞-Norm äquivalent sind. In der Tat behaupten wir,

$$\|v\|_\infty \leq \|v\|_p \leq \sqrt[p]{n} \, \|v\|_\infty.$$

Sei nämlich $s := \|v\|_\infty = \sup |v_i|$. Dann gilt $0 \leq |v_i| \leq s$ für $i = 1, 2, \ldots, n$ mit Gleichheit auf der rechten Seite mindestens einmal. Das heißt,

$$s^p \leq \sum_{i=1}^{n} |v_i|^p \leq n s^p,$$

wovon die p-te Wurzel die behauptete Ungleichung ist. □

Bemerkung B4.8. Später sehen wir, *alle* Normen auf einem endlichdimensionalen Vektorraum sind äquivalent.

B5. Beschränkte Räume

Definition B5.1. Der *Durchmesser* eines nichtleeren metrischen Raumes (X, d) ist

$$\operatorname{diam} X := \sup_{x,y \in X} d(x, y) \in [0, +\infty].$$

Wir vereinbaren, $\operatorname{diam} \varnothing := 0$ (und nicht etwa $-\infty$). Ein Raum X heißt *beschränkt*, falls $\operatorname{diam} X < \infty$.

Bemerkung B5.2. Natürlich wenden wir diese Definitionen auch auf Teilmengen $Y \subset X$ an, wobei Eigenschaften des Unterraumes (Y, d) gemeint sind. Jede Teilmenge eines beschränkten Raumes ist beschränkt.

Beispiele B5.3. Jeder diskrete Raum hat Durchmesser 1 und ist deshalb beschränkt. In der Standardmetrik auf $\mathbb{R}$ sind $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$ unbeschränkt; ein Intervall mit Endpunkten $a, b \in \mathbb{R}$ ist beschränkt mit Durchmesser $|b - a|$, egal, ob es offen oder halboffen oder kompakt ist.

Lemma B5.4. *Sei (X, d) ein metrischer Raum ($X \neq \varnothing$) und sei $T \subset X$. Folgende Aussagen sind äquivalent:*

1. *T ist beschränkt,*
2. *es gibt einen Ball $B_R(x)$ in X mit $T \subset B_R(x)$,*
3. *zu jedem $x \in X$ gibt es $R > 0$ mit $T \subset B_R(x)$.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, $T \neq \varnothing$. (Für $T = \varnothing$ gelten offensichtlich alle drei Aussagen.)
(1 $\implies$ 2): Ist T beschränkt, dann gilt $T \subset B_R(t)$ für jedes $t \in T$ und jedes $R > \operatorname{diam} T$.
(2 $\implies$ 3): Ist $T \subset B_r(x)$ und ist $y \in X$, dann gilt

$$T \subset B_r(x) \subset B_R(y) \quad \text{mit} \quad R = r + d(x, y).$$

(3 $\implies$ 1): Ist $T \subset B_R(x)$, dann gilt

$$\operatorname{diam} T \leq \operatorname{diam} B_R(x) \leq 2R.$$ □

Korollar B5.5. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und seien $A, A' \subset X$ beschränkt. Dann ist auch $A \cup A'$ beschränkt. (Es folgt mit Induktion, dass jede endliche Vereinigung beschränkter Teilmengen auch beschränkt ist.)*

Beweis. Sei $x \in X$. Aus dem Lemma gibt es R, R' so, dass $A \subset B_R(x)$ und $A' \subset B_{R'}(x)$. Dann gilt $A \cup A' \subset B_r(x)$ mit $r := \max\{R, R'\}$. □

Ende der Vorlesung 2008 November 10

Beispiel B5.6. Auf $\mathbb{R}$ definieren wir die Metrik $d(x, y) := |\arctan y - \arctan x|$. Mit dieser Metrik ist $\mathbb{R}$ beschränkt:

$$\operatorname{diam}(\mathbb{R}, d) = \lim_{x \to \infty} \arctan x - \lim_{x \to -\infty} \arctan x = \pi.$$

Die Metrik ist aber äquivalent zur Standardmetrik (warum?), was heißt, Beschränktheit ist nicht topologisch. Bezüglich dieser Metrik ist die Folge $a_n := n$ eine Cauchyfolge, die nicht konvergiert. Das heißt, $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig; Vollständigkeit ist auch nicht topologisch.

Definition B5.7. Sei A eine Menge und (X, d) ein metrischer Raum. Eine Abbildung $f \colon A \to X$ heißt dann *beschränkt*, falls das Bild $f(A)$ beschränkt ist. Den Raum aller beschränkten Abbildungen $f \colon A \to X$ bezeichnen wir als $\mathcal{B}(A, X)$. Für $f, g \in \mathcal{B}(A, X)$ definieren wir

$$d_\infty(f, g) := \sup_{a \in A} d(f(a), g(a)).$$

Lemma B5.8. *Auf $\mathcal{B}(A, X)$ ist d_∞ eine Metrik.*

Beweis. Endlichkeit: Weil f und g beschränkt sind, gilt

$$d_\infty(f, g) \leq \operatorname{diam}(f(A) \cup g(A)) < \infty.$$

Definitheit: Ist $d_\infty(f, g) = 0$, dann gilt $f(a) = g(a)$ für alle a, d.h., $f = g$. Dreiecksungleichung: Seien $f, g, h \in \mathcal{B}(A, X)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es $a_0 \in A$ so, dass

$$\begin{aligned} d_\infty(f, h) = \sup d(f(a), h(a)) &\leq d(f(a_0), h(a_0)) + \varepsilon \\ &\leq d(f(a_0), g(a_0)) + d(g(a_0), h(a_0)) + \varepsilon \\ &\leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h) + \varepsilon \end{aligned}$$

Weil $\varepsilon > 0$ beliebig war, gilt $d_\infty(f, h) \leq d_\infty(f, g) + d_\infty(g, h)$. □

Definition B5.9. Sei (f_n) eine Folge in $\mathcal{B}(A, X)$ und sei $f \in \mathcal{B}(A, X)$. Falls $f_n \to f$ (bezüglich der Metrik d_∞), sagen wir, die Abbildungen f_n *konvergieren gleichmäßig* gegen f.

B6. Kompaktheit

a. Totalbeschränkte und folgenkompakte Räume

Definition B6.1. Eine *Überdeckung* eines Raumes X ist ein System $\{T_\alpha : \alpha \in A\}$ von Teilmengen $T_\alpha \subset X$, deren Vereinigung der ganze Raum $X = \bigcup_\alpha T_\alpha$ ist. Die Überdeckung heißt *endlich*, falls die Indexmenge A endlich ist. Die Überdeckung heißt *offen*, falls jedes T_α offen in X ist. Eine *Teilüberdeckung* ist durch eine Teilmenge $B \subset A$ gegeben, falls $\{T_\alpha : \alpha \in B\}$ den ganzen Raum X noch überdeckt.

Beispiel B6.2. Das Intervall $[0,1]$ hat folgende Überdeckung mit $A = \mathbb{N}$:

$$T_n := \begin{cases} \{0\}, & n = 0, \\ [2^{-n}, 2^{1-n}], & n > 0. \end{cases}$$

Diese Überdeckung ist weder endlich noch offen; sie hat keine Teilüberdeckungen (außer sich selbst).

Beispiel B6.3. Die offene Überdeckung $\{(-n,n) : n \in \mathbb{N}^+\}$ von $\mathbb{R}$ hat keine endlichen Teilüberdeckungen. Jede unendliche Teilmenge $B \subset \mathbb{N}^+$ gibt aber eine Teilüberdeckung.

Definition B6.4. Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $\varepsilon > 0$. Eine Teilmenge $A \subset X$ heißt *ε-Netz*, falls $\{B_\varepsilon(a) : a \in A\}$ eine Überdeckung von X ist, d.h., falls es zu jedem $x \in X$ ein $a \in A$ so gibt, dass $d(x,a) < \varepsilon$.

Beispiele B6.5. In einem diskreten Raum X ist X das einzige 1-Netz; jedes $\{x\}$ ist aber ein 2-Netz. In $\mathbb{R}$ (mit der Standardmetrik) ist $\mathbb{Q}$ für jedes $\varepsilon > 0$ ein ε-Netz; $\mathbb{Z}$ ist ein 1-Netz.

Definition B6.6. Ein metrischer Raum (X,d) heißt *totalbeschränkt*, falls es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz gibt.

Bemerkung B6.7. Ein Raum ist genau dann totalbeschränkt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine endliche Überdeckung durch Teilmengen von Durchschnitt höchstens ε gibt. (Eine Richtung folgt, weil $\operatorname{diam} B_\varepsilon(x) \le 2\varepsilon$; die andere Richtung folgt, weil jede Teilmenge T mit $\operatorname{diam} T \le \varepsilon$ in einer 2ε-Ball enthalten ist.)

Lemma B6.8. *Jeder totalbeschränkte Raum ist beschränkt.*

Beweis. Ein totalbeschränkter Raum ist eine endliche Vereinigung (beschränkter) 1-Bälle, aus Korollar B5.5 ist er deshalb beschränkt. □

Beispiel B6.9. Ein diskreter Raum ist genau dann totalbeschränkt, wenn er endlich ist.

Satz B6.10. *Ein metrischer Raum (X,d) ist genau dann totalbeschränkt, wenn jede Folge in X eine Teilfolge besitzt, die eine Cauchyfolge ist.*

Definition B6.11. [Vgl. I.D7.3.] Ein metrischer (oder topologischer) Raum heißt *folgenkompakt*, falls jede Folge eine konvergente Teilfolge hat.

Korollar B6.12. [Vgl. I.D7.4.] *Ein metrischer Raum ist genau dann folgenkompakt, wenn er vollständig und totalbeschränkt ist.*

Beweis. (Aufgabe.) □

Beweis des Satzes. Falls X nicht totalbeschränkt ist, können wir $r > 0$ so wählen, dass es kein endliches r-Netz gibt. Wir wählen ein beliebiges $a_0 \in X$ und definieren rekursiv eine Folge (a_n), indem wir a_{n+1} beliebig in

$$X \setminus \bigcup_{j=0}^{n} B_r(a_j)$$

wählen. (Weil $\{a_j : j = 0, \dots, n\}$ kein r-Netz ist, ist diese Menge nicht leer.) Die Folge (a_n) hat die Eigenschaft, dass $d(a_n, a_m) \ge r$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Weil jede Teilfolge dieselbe Eigenschaft hat, ist sie insbesondere keine Cauchyfolge.

Umgekehrt, sei (a_n) eine Folge im totalbeschränkten Raum (X,d). Wir wollen unendliche Teilmengen

$$\mathbb{N} = J_0 \supset J_1 \supset J_2 \supset \cdots$$

rekursiv so definieren, dass $\operatorname{diam}\{a_n : n \in J_k\} \le 1/k$. Um J_k zu definieren wählen wir eine endliche Überdeckung von X durch Teilmengen T mit Durchmesser höchstens $1/k$. Weil J_{k-1} unendlich ist, die Überdeckung aber endlich, gibt es (mindestens) ein $T =: T_k$ so, dass

$$J_k := \{n \in J_{k-1} : a_n \in T_k\}$$

unendlich ist. Jetzt definieren wir rekursiv eine monotone Folge (n_k) in $\mathbb{N}$, indem wir n_0 in $\mathbb{N}$ und $n_k > n_{k-1}$ in J_k beliebig wählen. Wir behaupten, die Teilfolge $b_k := a_{n_k}$ ist eine Cauchyfolge. Für $i, j \ge k > 1/\varepsilon$ gilt nämlich $n_i, n_j \in J_k$ und deshalb $b_i, b_j \in T_k$. Das bedeutet,

$$d(b_i, b_j) \le \operatorname{diam} T_k \le 1/k < \varepsilon.$$ □

Ende der Vorlesung 2008 November 13

b. Kompaktheit durch Überdeckungen

Definition B6.13. Ein metrischer (oder topologischer) Raum heißt *kompakt*, falls jede offene Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung hat.

Beispiel B6.14. Die Überdeckung $\{(-n,n)\}$ zeigt, dass $\mathbb{R}$ nicht kompakt ist.

Bemerkung B6.15. Kompaktheit und Folgenkompaktheit sind topologische Begriffe. Es gibt topologische Räume, die kompakt aber nicht folgenkompakt sind. Es gibt auch Räume, die folgenkompakt aber nicht kompakt sind. Wenn wir aber nur metrische Räume betrachten sind Kompaktheit und Folgenkompaktheit äquivalent. Um dies zu beweisen, benutzen wir vier Lemmata.

Lemma B6.16. *Ein kompakter metrischer Raum ist totalbeschränkt.*

Beweis. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $\{B_\varepsilon(x) : x \in X\}$ eine offene Überdeckung. Eine Teilüberdeckung ist genau ein ε-Netz. Wenn X kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung, d.h. ein endliches ε-Netz. □

Lemma B6.17. *Ein kompakter metrischer Raum ist vollständig.*

Beweis. Sei (X, d) nichtvollständig. D.h., es gibt eine Cauchyfolge (a_k), die nicht konvergiert. Zu jedem $n \in \mathbb{N}^+$ gibt es (aus Lemma B2.7) ein $x_n \in X$ so, dass $d(a_k, x_n) < 1/n$ für fast alle k. Wir setzen $U_n := \{x \in X : d(x, x_n) > 1/n\}$ und bemerken, dass jedes U_n offen ist und nur endlich viele Folgenglieder a_k enthält.

Wir behaupten, $\{U_n\}$ überdeckt X. Sonst gäbe es $x \notin \bigcup U_n$. Das hieße für jedes n, dass $d(x, x_n) \le 1/n$ und deshalb $d(x, a_k) < 2/n$ für fast alle k. Dann wäre x aber ein Grenzwert von (a_k).

Wir haben deshalb eine offene Überdeckung $\{U_n\}$ von X. Weil jedes U_n nur endlich viele a_k enthält, gibt es keine endliche Teilüberdeckung. Das heißt, X ist nicht kompakt. □

Definition B6.18. Sei $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung eines metrischen Raumes (X, d). Ein $\delta > 0$ heißt dann *Lebesguezahl* für $\{U_\alpha\}$, wenn es zu jeder Teilmenge $C \subset X$ mit $\operatorname{diam} C < \delta$ ein $\alpha \in A$ so gibt, dass $C \subset U_\alpha$.

Beispiele B6.19.

- Jedes $\delta > 0$ ist eine Lebesguezahl für die offene Überdeckung $\{(-n, n)\}$ von $\mathbb{R}$. (Weil $\mathbb{R}$ archimedisch ist.)
- Die Überdeckung $\{(2n, 2n + 3) : n \in \mathbb{Z}\}$ von $\mathbb{R}$ hat Lebesguezahl $\delta = 1$. (Weil jedes $C \subset \mathbb{R}$ mit $\operatorname{diam} C = d$ in einem Intervall $[x, x + d]$ enthalten ist.)
- Die Überdeckung $\{(2^n, 3 \cdot 2^n) : n \in \mathbb{Z}\}$ von $(0, \infty)$ hat keine Lebesguezahl $\delta > 0$. (Weil $C := (0, \varepsilon)$ auch für kleines ε in keinem Intervall $(2^n, 3 \cdot 2^n)$ enthalten ist.)

Lemma B6.20. *Jede offene Überdeckung eines folgenkompakten metrischen Raumes hat eine Lebesguezahl.*

Beweis. Sei $\{U_\alpha : \alpha \in A\}$ eine offene Überdeckung des folgenkompakten Raumes (X, d). Wir nehmen an, es gibt keine Lebesguezahl $\delta > 0$. Das heißt, zu jedem $n \in \mathbb{N}^+$ gibt es $C_n \subset X$ mit $\operatorname{diam} C_n < 1/n$ so, dass C_n in kein U_α enthalten ist. Wir wählen $a_n \in C_n$. Weil X folgenkompakt ist, hat (a_n) eine konvergente Teilfolge (a_{n_k}); wir nennen den Grenzwert $x \in X$. Weil $\{U_\alpha\}$ eine Überdeckung ist, gibt es $\alpha \in A$ mit $x \in U_\alpha$. Weil U_α offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$. Weil $a_{n_k} \to x$ gilt $a_{n_k} \in B_{\varepsilon/2}(x)$ für fast alle k. Für $n > 2/\varepsilon$ gilt aber $\operatorname{diam} C_n < \varepsilon/2$. Mit $a_n \in C_n$ heißt das, $C_{n_k} \subset B_\varepsilon(x) \subset U_\alpha$ für fast alle k. Widerspruch (zur Wahl von C_n)! □

Korollar B6.21. *Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er folgenkompakt ist.*

Beweis. Sei (X, d) folgenkompakt und sei $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung. Aus Lemma B6.20 hat sie eine Lebesguezahl $\delta > 0$. Weil (X, d) totalbeschränkt ist (Korollar B6.12) gibt es zu $\varepsilon := \delta/3$ ein endliches ε-Netz $\{x_i : i = 1, \dots, N\}$, d.h. eine endliche Überdeckung durch die Bälle $B_\varepsilon(x_i)$. Weil $\operatorname{diam} B_\varepsilon(x_i) \le 2\delta/3 < \delta$, ist jeder Ball in einem U_α enthalten, sagen wir U_{α_i}. Dann ist $\{U_{\alpha_i} : i = 1, \dots, N\}$ eine endliche Teilüberdeckung, weil $\bigcup U_{\alpha_i} \supset \bigcup B_\varepsilon(x_i) = X$.

Umgekehrt, sei (X, d) kompakt. Dann ist X aus Lemma B6.16 totalbeschränkt und aus Lemma B6.17 vollständig, mit Korollar B6.12 also folgenkompakt. □

c. Abgeschlossene und kompakte Teilmengen

Im letzten Semester zeigten wir (I.D7.4, Satz von Bolzano–Weierstraß), dass eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}$ genau dann folgenkompakt ist, wenn K abgeschlossen und beschränkt ist. (Wenn man hier „folgenkompakt“ mit „kompakt“ ersetzt, heißt es dann der Satz von Heine–Borel. Weil wir alles in einer anderen Reihenfolge machen, sehen wir diesen Satz als solche nicht.) Nun haben wir gezeigt, ein metrischer Raum K ist genau dann (folgen)kompakt, wenn K vollständig und totalbeschränkt ist. Jetzt wollen wir die Zusammenhänge näher untersuchen.

Lemma B6.22. [Vgl. I.D7.2.] *Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Teilmenge $A \subset X$ ist genau dann abgeschlossen in X, wenn für jede konvergente Folge $a_n \to x \in X$ mit $a_n \in A$ gilt $x \in A$.*

Beweis. (Aufgabe.) □

Korollar B6.23. *Eine abgeschlossene Teilmenge eines vollständigen metrischen Raumes ist (mit der induzierten Metrik) vollständig.*

Beweis. Sei (X, d) vollständig, sei $A \subset X$ abgeschlossen und sei (a_n) eine Cauchyfolge in A. Als Cauchyfolge in X hat (a_n) einen Grenzwert $x \in X$. Aus dem Lemma liegt aber $x \in A$. □

Satz B6.24. *Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei (A, d) ein vollständiger Unterraum. Dann ist $A \subset X$ abgeschlossen.*

Beweis. Sei (a_n) eine Folge in A, die in X gegen $x \in X$ konvergiert. Wir zeigen, dass $x \in A$; dann folgt aus dem letzten Lemma, dass A abgeschlossen ist. Als konvergente Folge ist (a_n) aber eine Cauchyfolge in X, d.h. auch in A, weil $d(a_n, a_m)$ unverändert ist. Weil (A, d) vollständig ist, hat a_n in A einen Grenzwert a. Weil Grenzwerte eindeutig sind (Lemma B2.2), gilt $x = a \in A$. □

Korollar B6.25. *Eine Teilmenge eines kompakten metrischen Raumes ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen ist.*

Beweis. Ist $T \subset K$ kompakt, dann ist T vollständig und (aus dem Satz) abgeschlossen. Umgekehrt gilt folgendes: weil K totalbeschränkt ist, ist jede Teilmenge auch totalbeschränkt; weil K vollständig ist, ist jede abgeschlossene Teilmenge vollständig. □

Korollar B6.26. *Jede kompakte Teilmenge eines metrischen Raumes ist abgeschlossen und beschränkt.*

Beweis. Ein kompaktes $K \subset (X, d)$ ist vollständig und totalbeschränkt, deshalb abgeschlossen (aus Satz B6.24) und beschränkt (aus Lemma B6.8). □

Ende der Vorlesung 2008 November 17

Umgekehrt wissen wir, dass abgeschlossene Teilmengen $A \subset X$ nur dann alle vollständig sind, wenn X vollständig ist. Wir wissen auch, dass nicht jeder beschränkte Raum totalbeschränkt ist. Im euklidischen Raum sieht es aber besser aus, einfach weil wir jeden Würfel in beliebig kleine Stücke zerschneiden können.

Lemma B6.27. *Eine beschränkte Teilmenge im euklidischen Raum $\mathbb{E}^n$ ist totalbeschränkt.*

Beweis. Sei $T \subset E^n$ beschränkt. Dann gibt es $R > 0$ mit

$$T \subset B_R(0) \subset [-R, R]^n.$$

Zu $\varepsilon > 0$ wählen wir $k \geq 2\sqrt{n}R/\varepsilon$ und zerschneiden den Würfel in k^n kleine Würfel mit Seitenlänge höchstens $\varepsilon/\sqrt{n}$ und deshalb Durchmesser höchstens ε. □

Bemerkung B6.28. Die Kompaktheit des Würfels folgt auch aus dem sehr allgemeinen Satz von Tichonow: jedes (auch unendliche) kartesische Produkt kompakter Räume ist (mit der sogenannten Produkttopologie) selbst kompakt.

Korollar B6.29. *Eine Teilmenge im euklidischen Raum ist genau dann kompakt, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist.* □

Bemerkung B6.30. Dieser Satz gilt auch, wenn wir die euklidische Metrik mit einer anderen ℓ^p-Metrik ersetzen. Auch wenn Beschränktheit und Vollständigkeit keine topologischen Eigenschaften sind, bleiben sie bei äquivalenten *Normen* unverändert.

Lemma B6.31. *Eine Folge im $\mathbb{E}^n$ konvergiert genau dann, wenn sie komponentenweise konvergiert. Genauer gesagt, sei (a_k) eine Folge im $\mathbb{R}^n$ mit $a_k =: (a_{k,1}, \dots, a_{k,n})$. Dann gilt*

$$\lim_{k\to\infty} a_k = x =: (x_1, \dots x_n) \iff \forall j \lim_{k\to\infty} a_{k,j} = x_j.$$

Beweis. (Aufgabe.) □

B7. Stetigkeit

a. Definition

Definition B7.1. [Vgl. I.D2.1.] Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume und sei $p \in X$. Eine Funktion $f\colon X \to Y$ heißt *stetig in p*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad f(B_\delta(p)) \subset B'_\varepsilon(f(p)),$$

das heißt, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ es ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$d(x, p) < \delta \implies d'(f(x), f(p)) < \varepsilon.$$

Die Abbildung f heißt *stetig*, falls sie in jedem Punkt $p \in X$ stetig ist.

Satz B7.2. [Vgl. I.D2.5.] *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für jede offene Menge $U \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X ist.*

Beweis. Sei f stetig und sei $U \subset Y$ offen. Wir müssen zeigen, dass jedes $x \in f^{-1}(U)$ ein innerer Punkt ist. Sei $y := f(x) \in U$. Weil U offen ist, gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $B'_\varepsilon(y) \subset U$. Weil f stetig ist, gibt es zu diesem ε ein $\delta > 0$ so, dass $f(B_\delta(x)) \subset B'_\varepsilon(y)$. Das bedeutet

$$B_\delta(x) \subset f^{-1}(B'_\varepsilon(y)) \subset f^{-1}(U).$$

Umgekehrt, seien die Urbilder aller offenen Mengen offen. Wir müssen zeigen, dass f in jedem Punkt $x \in X$ stetig ist. Sei $y := f(x) \in Y$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist $f^{-1}(B'_\varepsilon(y))$ offen und enthält x. Deshalb gibt es $\delta > 0$ mit $B_\delta(x) \subset f^{-1}(B'_\varepsilon(y))$, d.h., $f(B_\delta(x)) \subset B'_\varepsilon(y)$. □

Bemerkung B7.3. Für eine Abbildung zwischen topologischen Räumen ist diese Eigenschaft die Definition von Stetigkeit.

Beispiele B7.4.

(a) Die identische Abbildung $\mathrm{id}_X\colon X \to X$ ist auf jedem Raum (X, d) stetig.

(b) Jede konstante Abbildung ist stetig.

(c) Ist (X, d) diskret (und (Y, d') beliebig), dann ist jede Abbildung $f\colon X \to Y$ stetig.

(d) Sind $f\colon X \to Y$ und $g\colon Y \to Z$ stetig, dann ist $g \circ f$ auch stetig. (Weil $(g \circ f)^{-1}(U) = f^{-1}(g^{-1}U)$.)

(e) Eine Abbildung

$$f = (f_1, \dots, f_m)\colon X \to \mathbb{R}^m$$

ist genau dann stetig, wenn jede Komponentenfunktion $f_j\colon X \to \mathbb{R}$ stetig ist.

Korollar B7.5. *Eine Abbildung $f : X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn für jede abgeschlossene Menge $A \subset Y$ das Urbild $f^{-1}(A)$ abgeschlossen in X ist.*

Beweis. (Aufgabe.) □

Satz B7.6. [Vgl. I.D2.7.] *Sei $X = \bigcup_{\alpha\in A} U_\alpha$ eine offene Überdeckung des Raumes X und sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung. Falls für jedes $\alpha \in A$ die Einschränkung $f|_{U_\alpha}\colon U_\alpha \to Y$ stetig ist, dann ist f stetig.*

Beweis. Sei $V \subset Y$ offen. Wir wollen zeigen, dass $f^{-1}(V)$ offen ist. Zu jedem $p \in f^{-1}(V)$ gibt es $\alpha \in A$ mit $p \in U_\alpha$. Weil $f|_{U_\alpha}$ stetig ist, ist $f|_{U_\alpha}^{-1}(V) = f^{-1}(V) \cap U_\alpha$ offen. Deshalb gibt es $\varepsilon > 0$ mit $B_\varepsilon(p) \subset f^{-1}(V) \cap U_\alpha \subset f^{-1}(V)$. □

b. Grenzwerte

Definition B7.7. [Vgl. I.D2.1.] Sei (X, d) ein metrischer Raum. Ein Punkt $p \in X$ heißt *Häufungspunkt* (von X), falls $\{p\}$ nicht offen in X ist.

Beispiel B7.8. Ein diskreter Raum hat keine Häufungspunkte. Jeder Punkt in $\mathbb{E}^n$ ist Häufungspunkt.

Lemma B7.9. *Ein Punkt $p \in (X,d)$ ist genau dann ein Häufungspunkt, falls es eine Folge (x_n) in $X \setminus \{p\}$ mit $x_n \to p$ gibt.*

Beweis. Falls p ein Häufungspunkt ist, gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}^+$ einen Punkt $x_n \in B_{1/n}(p) \setminus \{p\}$; die Folge (x_n) konvergiert dann gegen p. Umgekehrt, falls $x_n \to p$, dann enthält jedes offene $U \ni p$ sogar fast alle x_n. □

Definition B7.10. [Vgl. I.D3.3.] Seien (X,d) und (Y,d') metrische Räume, sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und sei $p \in X$ ein Häufungspunkt. Wir sagen, $y \in Y$ ist ein *Grenzwert* von $f(x)$ für $x \to p$, geschrieben

$$\lim_{x\to p} f(x) = y \qquad \text{oder} \qquad f(x) \to y \text{ für } x \to p,$$

falls es zu jedem offenen $V \subset Y$ mit $y \in V$ ein offenes $U \subset X$ mit $p \in U$ so gibt, dass $f(U \setminus \{p\}) \subset V$.

Bemerkung B7.11. Der Grenzwert $\lim_{x\to p} f(x)$ hat nichts mit dem Wert $f(p)$ zu tun, nur mit Werten in naheliegenden Punkten. Wir könnten auch mit einer Funktion $f : X \setminus \{p\} \to Y$ anfangen.

Bemerkung B7.12. Falls ein Grenzwert existiert, ist er eindeutig. (Warum?) Hier ist es wichtig, dass p ein Häufungspunkt ist. (Sonst erfüllt jedes $y \in Y$ die Bedingungen mit $U = \{p\}$.)

Lemma B7.13. [Vgl. I.D3.8.] *Sei $f\colon X \to Y$ eine Abbildung und sei $p \in X$ ein Häufungspunkt. Es gilt $\lim_{x\to p} f(x) = y \in Y$ genau dann, wenn für jede Folge (x_n) in $X \setminus \{p\}$ mit $x_n \to p$ gilt $f(x_n) \to y$.*

Beweis. Wir nehmen zunächst an, $f(x) \to y$ für $x \to p$. Sei (x_n) eine Folge in $X \setminus \{p\}$ mit $x_n \to p$. Zu jedem $V \ni y$ offen in Y gibt es $U \ni p$ offen in X, so dass $f(U \setminus \{p\}) \subset V$. Weil $x_n \to p$, enthält U fast alle x_n. Das bedeutet, $f(x_n) \in V$ für fast alle n. Weil V beliebig war, konvergiert $f(x_n) \to y$.

Umgekehrt, sei y *kein* Grenzwert von $f(x)$ für $x \to p$. D.h., es gibt $V \ni y$ offen in Y, so dass zu jedem $U \ni p$ offen in X es ein $x \in U \setminus \{p\}$ mit $f(x) \notin V$ existiert. Zu jedem $n \in \mathbb{N}^+$ können wir insbesondere $U = B_{1/n}(p)$ benutzen, um einen Punkt x_n zu definieren. Die Folge (x_n) in $X \setminus \{p\}$ konvergiert offensichtlich gegen p. Weil aber $f(x_n) \notin V$, konvergiert $f(x_n)$ nicht gegen y. □

Bemerkung B7.14. Dieses Lemma gilt nicht in jedem topologischen Raum. Man kann sagen, es ist die archimedische Eigenschaft der reellen Zahlen (insbesondere $1/n \to 0$), die uns in einem metrischen Raum erlaubt, Konvergenz in abzählbar vielen Schritten (d.h. mittels einer Folge) zu betrachten.

Ende der Vorlesung 2008 November 20

Korollar B7.15. *Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig in $p \in X$, wenn für jede Folge (x_n) aus X mit $x_n \to p$ auch $f(x_n) \to f(p)$ gilt.*

Beweis. (Aufgabe.) □

c. Rechenregeln für reelle Funktionen

Aus den Rechenregeln für reelle Folgen (I.B5.2) folgt:

Korollar B7.16 (Rechenregeln). [Vgl. I.D3.12.] *Sei (X,d) ein metrischer Raum, seien $f,g\colon X \to \mathbb{R}$ Abbildungen und sei $p \in (X,d)$ ein Häufungspunkt, in dem Grenzwerte von f und g existieren. Dann gelten*

$$\lim_{x\to p} (f \pm g)(x) = \lim_{x\to p} f(x) \pm \lim_{x\to p} g(x),$$
$$\lim_{x\to p} (f \cdot g)(x) = \lim_{x\to p} f(x) \cdot \lim_{x\to p} g(x),$$

und, falls $g \neq 0$ in einer Umgebung von p, auch

$$\lim_{x\to p} (f/g)(x) = \lim_{x\to p} f(x) \,/\, \lim_{x\to p} g(x). \qquad \square$$

Korollar B7.17. *Seien $f,g\colon X \to \mathbb{R}$ stetig in $p \in X$. Dann sind auch $f \pm g$, $f \cdot g$ und (falls $g(p) \neq 0$) f/g stetig in p.* □

Bemerkung B7.18. Alternativ wissen wir (Beispiel B7.4e), dass $(f,g)\colon X \to \mathbb{R}^2$ stetig ist. Die arithmetische Verknüpfungen (Addition usw.) auf $\mathbb{R}$ sind auch als Abbildungen $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig. Deshalb ist $f + g = + \circ (f,g)$ als Verknüpfung zweier stetigen Abbildungen selbst stetig (Beispiel B7.4d).

d. Nochmal die erweiterten reellen Zahlen

Definition B7.19. Sei $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ die erweiterten reellen Zahlen (wie im letzten Semester, I.D4). Wir erweitern den Arcus Tangens, indem wir $\arctan(\pm\infty) := \pm\pi/2$ setzen. Dann ist $\arctan : \overline{\mathbb{R}} \to [-\pi/2, \pi/2]$ eine Bijektion. Auf $\overline{\mathbb{R}}$ definieren wir die Metrik

$$d_a(x,y) := \left|\arctan x - \arctan y\right|.$$

Bemerkung B7.20. Auf $\mathbb{R}$ ist d_a äquivalent zur Standardmetrik; $\overline{\mathbb{R}}$ ist die Vervollständigung von $(\mathbb{R}, d_a)$. Der Raum $(\overline{\mathbb{R}}, d_a)$ ist kompakt (und sogar isometrisch zu $[-\pi/2, \pi/2]$).

Bemerkung B7.21. Anstelle von arctan könnten wir natürlich eine beliebige monotone, beschränkte Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ benutzen. Die Metrik $d_f(x,y) := |f(x) - f(y)|$ wäre zu d_a äquivalent. Es gibt aber auf $\overline{\mathbb{R}}$ keine zu d_a äquivalente Metrik, die auf der Teilmenge $\mathbb{R} \subset \overline{\mathbb{R}}$ die Standardmetrik induziert.

Bemerkung B7.22. Die unendlichen Grenzwerte und Grenzwerte im Unendlichen, die wir im letzten Semester definierten, sind ganz normale Grenzwerte bezüglich der Metrik d_a. Das heißt, wir betrachten eine Funktion $f\colon \overline{\mathbb{R}} \to \overline{\mathbb{R}}$. Wenn wir $p = \lim_{x\to a} f(x)$ schreiben, heißt das einfach Konvergenz im metrischen Raum $(\overline{\mathbb{R}}, d_a)$ – auch im Falle $a = \pm\infty$ bzw. $p = \pm\infty$.

Bemerkung B7.23. Konvergenz von Folgen ist auch ein Spezialfall metrischer Konvergenz. Sei $\overline{\mathbb{N}} := \mathbb{N} \cup \{+\infty\} \subset \overline{\mathbb{R}}$. Auf $\mathbb{N}$ ist diese Metrik d_a äquivalent zur Standardmetrik auf $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ und deshalb auch zur diskreten Metrik. Damit ist jede Abbildung $f\colon (\mathbb{N}, d_a) \to (X,d)$ stetig. Die Folge $(f(n))$ konvergiert genau dann gegen $x \in X$, wenn die durch $f(\infty) := x$ erweiterte Abbildung $f\colon \overline{\mathbb{N}} \to X$ stetig ist.

B8. Stetige Funktionen auf kompakten Räumen

a. Erhaltung von Kompaktheit

Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume und sei $f : X \to Y$ stetig. Wir wissen, Stetigkeit ist dadurch charakterisiert, dass die Urbilder $f^{-1}(T)$ offener (bzw. abgeschlossener) Teilmengen $T \subset Y$ selbst offen (bzw. abgeschlossen) sind. Hingegen können wir nichts über das Bild $f(T)$ einer offenen bzw. abgeschlossenen Teilmenge $T \subset X$ sagen. Welche Eigenschaften bleiben unter stetigen Abbildungen erhalten? Kompaktheit ist die Wichstigste!

Satz B8.1. [Vgl. I.D7.6.] *Seien K und Y metrische Räume mit K kompakt und sei $f\colon K \to Y$ eine stetige Abbildung. Dann ist $f(K) \subset Y$ kompakt.*

Beweis mit Überdeckungen. Sei $\{U_\alpha\}$ eine offene Überdeckung von $f(K)$. Die Urbilder $V_\alpha := f^{-1}(U_\alpha)$ überdecken K und sind (wegen Stetigkeit) offen in K. Weil K kompakt ist, gibt es eine endliche Teilüberdeckung $\{V_{\alpha_i} : i = 1, \dots, N\}$ von K. Dann ist $\{U_{\alpha_i} : i = 1, \dots, N\}$ eine endliche Teilüberdeckung von $f(K)$. □

Weil ein metrischer Raum genau dann kompakt ist, wenn er folgenkompakt ist, hätten wir auch Folgenkompaktheit benutzen können.

Beweis mit Folgen. Sei (y_n) eine Folge in $f(K)$. Zu jedem y_n wählen wir $x_n \in K$ mit $f(x_n) = y_n$. Weil K kompakt ist, hat die Folge (x_n) eine konvergente Teilfolge $x_{n_k} \to x \in K$. Weil f stetig ist, konvergiert auch die Teilfolge

$$y_{n_k} = f(x_{n_k}) \to f(x) \in f(K).$$ □

Bemerkung B8.2. Die beiden Beweise haben nichts mit der genauen Metrik zu tun. Für eine stetige Abbildung zwischen topologischen Räumen haben wir zwei verschiedene Sätze bewiesen:

- das stetige Bild eines kompakten Raumes ist kompakt,
- das stetige Bild eines folgenkompakten Raumes ist folgenkompakt.

Die beiden Aussagen sind natürlich für metrische Räume äquivalent.

Korollar B8.3. *Seien X und Y metrische Räume und sei $f\colon X \to Y$ stetig. Das Bild $f(K)$ einer kompakten Teilmenge $K \subset X$ ist kompakt und damit beschränkt und abgeschlossen in Y.* □

Korollar B8.4 (Satz vom Maximum). [Vgl. I.D7.7.] *Sei $f\colon K \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion auf einem nichtleeren kompakten Raum K. Dann nimmt f auf K sein Minimum und Maximum an.* □

b. Gleichmäßige Stetigkeit

Definition B8.5. [Vgl. I.D7.8.] Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt dann *gleichmäßig stetig*, falls

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x_1 \in X \quad \forall x_2 \in X \\ d(x_1, x_2) < \delta \implies d'(f(x_1), f(x_2)) < \varepsilon.$$

Bemerkung B8.6. [Vgl. I.D7.9.] Dass f *stetig* ist, heißt dasselbe – nur mit „$\exists \delta > 0$“ und „$\forall x \in D$“ getauscht. Da darf δ von x abhängen. Hier muss δ unabhängig von x (oder „gleichmäßig“ für alle x) gewählt werden können. (Natürlich hängt δ immer noch von ε ab.)

Bemerkung B8.7. Gleichmäßige Stetigkeit ist kein topologischer Begriff; sie hängt von der Metrik ab.

Folgender Satz hat im Wesentlichen denselben Beweis wie im letzten Semester.

Satz B8.8. [Vgl. I.D7.12.] *Seien K und Y metrische Räume mit K kompakt. Dann ist jede stetige Abbildung $f\colon K \to Y$ gleichmäßig stetig.*

Beweis. (Aufgabe.) □

Wichtige Beispiele gleichmäßig stetiger Abbildungen sind die Lipschitzabbildungen.

Definition B8.9. Seien (X, d) und (Y, d') metrische Räume. Eine Abbildung $f\colon X \to Y$ heißt *Lipschitzabbildung*, falls es $\lambda > 0$ so gibt, dass für alle $x_1, x_2 \in X$ gilt

$$d'(f(x_1), f(x_2)) \le \lambda\, d(x_1, x_2).$$

Die Konstante λ heißt *Lipschitzkonstante* von f und wir sagen auch, f ist eine *λ-Lipschitzabbildung*.

Satz B8.10. *Jede Lipschitzabbildung ist gleichmäßig stetig.*

Beweis. Ist λ eine Lipschitzkonstante für f, können wir in der Definition gleichmäßiger Stetigkeit $\delta := \varepsilon/\lambda$ setzen. □

Definition B8.11. Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Lipschitzabbildung $X \to X$ mit Lipschitzkonstante $\lambda < 1$ heißt *Kontraktion*.

Definition B8.12. Sei $f\colon X \to X$ eine Abbildung. Ein Punkt $x \in X$ mit $f(x) = x$ heißt *Fixpunkt* von f.

Satz B8.13 (Fixpunktsatz von Banach). *Sei (X, d) ein nichtleerer vollständiger metrischer Raum und sei $f\colon X \to X$ eine Kontraktion. Dann hat f genau einen Fixpunkt.*

Beweis. Sei $\lambda < 1$ eine Lipschitzkonstante für f. Zunächst zeigen wir, f hat höchstens einen Fixpunkt. Aus $f(x) = x$ und $f(y) = y$ folgt

$$d(x, y) = d(f(x), f(y)) \le \lambda d(x, y).$$

Damit folgt $d(x, y) = 0$, also $x = y$.

Nun sei $a_0 \in X$. Wir definieren rekursiv $a_{n+1} := f(a_n)$ und behaupten, (a_n) ist eine Cauchyfolge. Es gilt

$$d(a_j, a_{j+1}) \le \lambda d(a_{j-1}, a_j) \le \ldots \le \lambda^j d(a_0, a_1).$$

Damit gilt für $k \ge j$

$$d(a_j, a_k) \le \sum_{i=j}^{k-1} \lambda^i d(a_0, a_1) \le \sum_{i=j}^{\infty} \lambda^i d(a_0, a_1) = \frac{\lambda^j}{1-\lambda} d(a_0, a_1),$$

und (a_n) ist Cauchyfolge.

Ende der Vorlesung 2008 November 24

Weil X vollständig ist, hat (a_n) einen Grenzwert $x \in X$. Wir zeigen, x ist ein Fixpunkt von f. Für jedes k gilt

$$\begin{aligned} d(x, f(x)) &\le d(x, a_{k+1}) + d(a_{k+1}, f(x)) \\ &= d(x, a_{k+1}) + d(f(a_k), f(x)) \\ &\le d(x, a_{k+1}) + \lambda d(x, a_k). \end{aligned}$$

Weil Letzteres gegen Null konvergiert, gilt $d(f(x), x) = 0$, also $f(x) = x$. □

c. Gleichmäßige Konvergenz

Seien A eine Menge und (X, d) ein metrischer Raum. Wir haben auf der Menge $\mathcal{B}(A, X)$ aller beschränkten Abbildungen $f\colon A \to X$ die Metrik d_∞ definiert; Konvergenz bezüglich d_∞ heißt gleichmäßige Konvergenz.

Satz B8.14. *Falls (X, d) vollständig ist, ist $(\mathcal{B}(A, X), d_\infty)$ auch vollständig.*

Beweis. Sei (f_n) eine Cauchyfolge in $\mathcal{B}(A, X)$. Für jedes $a \in A$ ist $(f_n(a))$ deswegen eine Cauchyfolge in X, weil

$$d(f_n(a), f_m(a)) \le d_\infty(f_n, f_m).$$

Weil X vollständig ist, hat $f_n(x)$ einen Grenzwert, den wir $f(x)$ nennen. Die Folge (f_n) konvergiert punktweise gegen die damit definierte Abbildung $f\colon A \to X$. Wir zeigen, die Konvergenz ist gleichmäßig. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Es gibt $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $m, n \ge N$ gilt $d_\infty(f_n, f_m) < \varepsilon/2$, d.h. für alle $a \in A$ gilt $d(f_n(a), f_m(a)) < \varepsilon/2$. Aus Lemma B3.13 (über den Rand eines Balls) gilt deshalb $d(f_n(a), f(a)) \le \varepsilon/2 < \varepsilon$ für alle $a \in A$ und alle $n \ge N$. □

Sei nun K ein kompakter metrischer Raum. Die Menge $C(K, X)$ aller stetigen Abbildungen $K \to X$ ist dann eine Teilmenge $C(K, X) \subset \mathcal{B}(K, X)$.

Satz B8.15. *Bezüglich d_∞ ist $C(K, X) \subset \mathcal{B}(K, X)$ abgeschlossen. Das heißt, falls (f_n) eine Folge von stetigen Abbildungen $K \to X$ ist, die gleichmäßig gegen $f\colon K \to X$ konvergiert, dann ist auch f stetig.*

Beispiel B8.16. Gleichmäßige Konvergenz ist hier wichtig. Die stetigen Abbildungen $f_k : [0,1] \to [0,1]$ mit $f_k(x) = x^k$ aus Beispiel A3.2 konvergieren punktweise gegen einen nichtstetigen Limes $f : [0,1] \to [0,1]$.

Beweis. Die Äquivalenz der beiden Aussagen folgt aus der Charakterisierung abgeschlossener Mengen mittels Folgen (Lemma B6.22).

Seien nun f_n stetig mit $f_n \to f$ gleichmäßig und sei $p \in K$. Um zu zeigen, dass f in p stetig ist, sei (x_j) eine Folge in K, die gegen p konvergiert. Wir müssen zeigen, $f(x_j) \to f(p)$. Dazu sei $\varepsilon > 0$. Weil $f_n \to f$ gleichmäßig, gibt es $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $x \in K$ und alle $n \ge N$ gilt

$$d(f_n(x), f(x)) < \varepsilon/3.$$

Weil f_N in p stetig ist und $x_j \to p$ konvergiert, gibt es $J \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $j \ge J$ gilt

$$d(f_N(x_j), f_N(p)) < \varepsilon/3.$$

Damit gilt für jedes $j \ge J$

$$\begin{aligned} &d(f(x_j), f(p)) \\ &\quad \le d(f(x_j), f_N(x_j)) + d(f_N(x_j), f_N(p)) + d(f_N(p), f(p)) \\ &\quad < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon. \end{aligned}$$ □

Bemerkung B8.17. Alternativ kann man mit einer unstetigen Abbildung $f\colon K \to X$ anfangen. Wenn f in p unstetig ist, gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $f^{-1}\big(B_\varepsilon(f(p))\big)$ keinen Ball um x enthält. Dann kann man zeigen, der $\varepsilon/3$-Ball um f besteht nur aus Abbildungen, die ebenso unstetig in p sind. (Der Fall, wo f in p einen Sprung hat, ist besonders anschaulich.) Damit ist die Menge aller unstetigen Abbildungen offen.

Bemerkung B8.18. Kompaktheit ist hier nicht so wichtig; man kann gleichmäßige Konvergenz auch für unbeschränkte Abbildungen definieren; ein gleichmäßiger Limes stetiger Abbildungen ist immer noch stetig.

Bemerkung B8.19. [Vgl. I.F1.9.] Man kann sagen, der Satz erlaubt uns (im Fall gleichmäßiger Konvergenz), zwei Limites zu tauschen:

$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to p} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(p) = f(p) = \lim_{x\to p} f(x) = \lim_{x\to p} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Hier gilt natürlich die dritte Gleichung nur deshalb, weil f stetig ist. (Alle anderen gelten schon, wenn $f_n \to f$ punktweise.)

Hinter den allermeisten wichtigen Begriffen der Analysis (u.a. Ableitung und Integral) stecken Grenzwerte. Das heisst, wenn man z.B. zwei Integrale oder Ableitungen tauschen will, ist die zugrunde liegende Frage die, ob zwei Limites getauscht werden dürfen. Gleichmäßigkeit spielt immer wieder eine wichtige Rolle.

B9. Zusammenhang

Um den Zwischenwertsatz auf beliebige metrische Räume zu erweitern, müssen wir ein Analogon zu Intervallen finden. Das sind zusammenhängende Räume. Wir werden sehen, Zusammenhang ist die zweite wichtige Eigenschaft, die under stetigen Abbildungen erhalten bleibt.

Definition B9.1. Ein Raum X heißt dann *zusammenhängend*, falls $\varnothing$ und X die einzigen Teilmengen sind, die zugleich offen und abgeschlossen sind.

Beispiel B9.2. Offensichtlich ist jeder Raum mit höchstens einem Punkt zusammenhängend. Sonst sind diskrete Räume (insbes. endliche metrische Räume) nie zusammenhängend.

Beispiel B9.3. Die rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ sind nicht zusammenhängend, weil z.B.

$$\{x \in \mathbb{Q} : x^2 < 2\} = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \le 2\}$$

zugleich offen und abgeschlossen in $\mathbb{Q}$ ist.

Satz B9.4. *Sei (X,d) ein metrischer Raum und sei $T \subset X$ eine Teilmenge. Dann ist (T,d) mit der inzudierten Metrik genau dann zusammenhängend, wenn folgendes gilt:*

Sind $\hat{U}, \hat{V} \subset X$ disjunkte, offene Mengen mit $T \subset \hat{U} \cup \hat{V}$, dann gilt entweder $T \subset \hat{U}$ oder $T \subset \hat{V}$.

Lemma B9.5. *Sei $T \subset (X,d)$. Eine Teilmenge $U \subset T$ ist genau dann offen in T, wenn es ein offenes $\hat{U} \subset X$ gibt mit $U = T \cap \hat{U}$.*

Beweis. Deses Lemma wurde schon in der Übung bewiesen. Hier nochmal ein Beweis zum Lesen.

Für $t \in T$ sei $B_\varepsilon(t)$ der ε-Ball um t in X. Dann ist es klar, dass $T \cap B_\varepsilon(t)$ der ε-Ball um t in T ist.

Nun sei $U \subset T$ offen. Zu jedem $t \in U$ gibt es $\varepsilon(t) > 0$ so, dass $T \cap B_{\varepsilon(t)}(t) \subset U$. Wir definieren

$$\hat{U} := \bigcup_{t \in U} B_{\varepsilon(t)}(t),$$

sodass $U = T \cap B$. Als Vereinigung offener Mengen ist $\hat{U}$ offen in X.

Umgekehrt, sei $\hat{U} \subset X$ offen und sei $U := T \cap \hat{U}$. Zu jedem $t \in U \subset \hat{U}$ gibt es $\varepsilon > 0$ so, dass $B_\varepsilon(t) \subset \hat{U}$ und damit $T \cap B_\varepsilon(t) \subset U$. □

Beweis des Satzes. Sei (T,d) zusammenhängend und seien $\hat{U}, \hat{V} \subset X$ wie im Satz. Wir setzen $U := T \cap \hat{U}$ und $V := T \cap \hat{V}$. Dann sind U, V disjunkte offene Teilmengen in T, deren Vereinigung T ist. Das heißt, $V = T \setminus U$, und damit sind U, V zugleich abgeschlossen. Weil T zusammenhängend ist, gilt dann entweder $U = \varnothing$, $V = T$ oder $U = T$, $V = \varnothing$.

Umgekehrt wollen wir zeigen, T ist zusammenhängend. Dazu sei U zugleich offen und abgeschlossen in T, d.h., $V := T \setminus U$ ist auch offen. Wenn wir einfach aus dem Lemma beliebige offene Mengen $\hat{U}, \hat{V} \subset X$ mit $U = T \cap \hat{U}$ und $V = T \cap \hat{V}$ wählen, dann gilt natürlich $T \subset \hat{U} \cup \hat{V}$ aber $\hat{U}$ und $\hat{V}$ sind nicht unbedingt disjunkt. Deshalb wiederholen wir die Konstruktion aus dem Lemma, halbieren aber die Radien:

$$\hat{U} := \bigcup_{u \in U} B_{\varepsilon(u)/2}(u), \qquad \hat{V} := \bigcup_{v \in V} B_{\varepsilon(v)/2}(v).$$

Dann behaupten wir, $\hat{U}$ und $\hat{V}$ sind disjunkt. Aus dieser Behauptung und der Voraussetzung folgt, dass entweder $T \subset \hat{U}$ oder $T \subset \hat{V}$, d.h., dass entweder $U = T$ oder $V = T$ (und damit $U = \varnothing$).

Um die Behauptung zu beweisen, sei $w \in \hat{U} \cap \hat{V}$. Dann gibt es $u \in U \subset T$ und $v \in V \subset T$ mit

$$w \in B_{\varepsilon(u)/2}(u) \cap B_{\varepsilon(v)/2}(v).$$

Sei etwa $\varepsilon(u) \le \varepsilon(v)$. Dann gilt

$$d(u,v) \le d(u,w) + d(w,v) < \frac{\varepsilon(u)}{2} + \frac{\varepsilon(v)}{2} \le \varepsilon(u).$$

D.h., $v \in B_{\varepsilon(u)}(u)$. Es gilt aber $B_{\varepsilon(u)}(u) \cap T \subset U$. Weil $v \in T$ gilt damit $v \in U$ – im Widerspruch zu $v \in V = T \setminus U$. □

Bemerkung B9.6. Obwohl Zusammenhang natürlich ein topologischer Begriff ist, gilt dieser Satz nicht in jedem topologischen Raum X.

Ende der Vorlesung 2008 November 27

Wie Kompaktheit bleibt auch Zusammenhang unter stetigen Abbildungen erhalten.

Satz B9.7. *Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung. Ist X zusammenhängend, dann ist auch $f(X)$ zusammenhängend.*

Beweis. Seien U, V disjunkt und offen in Y mit $f(X) \subset U \cup V$. Wir wollen zeigen, entweder $f(X) \subset U$ oder $f(X) \subset V$. Weil f stetig ist, sind $f^{-1}(U)$ und $f^{-1}(V)$ offen in X. Die sind aber disjunkt und überdecken X. Weil X zusammenhängend ist, gilt dann entweder $f^{-1}(U) = \varnothing$ oder $f^{-1}(V) = \varnothing$. □

Um diesen Satz als Erweiterung des Zwischenwertsatzes zu sehen, zeigen wir, dass die zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ genau die Intervalle sind. Wir erinnern uns, ein *Intervall* in $\mathbb{R}$ ist ein Teilmenge I mit folgender Eigenschaft (I.D5.3):

Sind $x, y \in I$ und ist $x < p < y$, dann ist $p \in I$.

Satz B9.8. *Eine Teilmenge $T \subset \mathbb{R}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie ein Intervall ist.*

Beweis. Sei $T \subset \mathbb{R}$ zusammenhängend. Seien $x < p < y$ mit $x, y \in T$. Wäre $p \notin T$, so wäre

$$T \subset (-\infty, p) \cup (p, +\infty),$$

also (weil T zusammenhängend) entweder $T \subset (-\infty, p)$ oder $T \subset (p, +\infty)$. Das Erste gilt aber nicht, weil $y \in T$, und das Zweite gilt nicht, weil $x \in T$.

Umgekehrt, sei $T \subset \mathbb{R}$ ein Intervall. Seien $U, V \subset \mathbb{R}$ disjunkt und offen mit $T \subset U \cup V$. Wir nehmen an, es gibt $x \in T \cap U$ und $y \in T \cap V$, und folgern daraus einen Widerspruch. Ohne Einschränkung sei $x < y$ und damit $[x,y] \subset T$. Wir definieren $X := U \cap [x,y]$, $Y := V \cap [x,y] = [x,y] \setminus X$ und $p := \sup X \in [x,y]$. Es gilt entweder $p \in X$ oder $p \in Y$; wir zeigen, dass beide zum Widerspruch führen.

Ist $p \in X$, dann ist $p \neq y$; weil X offen in $[x,y]$ ist, gibt es dann $\varepsilon > 0$ mit $[p, p+\varepsilon) \subset X$, insbesondere mit $p + \varepsilon/2 \in X$. Das heißt, p ist keine obere Schranke für X.

Ist hingegen $p \in Y$, dann ist $p \neq x$; weil Y offen in $[x,y]$ ist, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $(p-\varepsilon, p] \subset Y$, d.h., $(p-\varepsilon, p]$ ist disjunkt von X. Weil p eine obere Schranke für X ist, ist auch $(p,y]$ disjunkt von X. D.h., $X \subset [x, p-\varepsilon]$ und damit ist $p - \varepsilon$ eine kleinere obere Schranke für X. □

Korollar B9.9. [Vgl. I.D6.1.] *Sei X zusammenhängend und sei $f : X \to \mathbb{R}$ stetig. Dann ist $f(X)$ ein Intervall. Das heißt, f nimmt jeden Wert an, der zwischen zwei Funktionswerten liegt.*

Beweis. Mit Satz B9.8 ist dies der Spezialfall $Y = \mathbb{R}$ vom Satz B9.7. □

Bemerkung B9.10. Die großen Sätze vom letzten Semester über reelle Funktionen (I.D7.7; I.D7.12; Zwischenwertsatz I.D6.1; usw.) verstehen wir jetzt als Folgerungen zweier topologischer Eigenschaften eines Intervalls $[a, b]$: Kompaktheit und Zusammenhang. Mit den beiden eher abstrakten Definitionen konnten wir ganz schnell beweisen, dass beide Eigenschaften unter stetigen Abbildungen erhalten bleiben (B8.1, B9.7). Eigentlich steckt mehr Arbeit darin, zu zeigen, dass $[a, b]$ die beiden Eigenschaften hat (B6.29, B9.8).

Definition B9.11. Sei X ein Raum, seien $x, y \in X$ und sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall. Eine stetige Abbildung $\gamma\colon [a, b] \to X$ mit $\gamma(a) = x$ und $\gamma(b) = y$ heißt ein *Weg* in X von x nach y. Das Bild $\gamma([a, b])$ nennen wir auch die *Spur* des Weges.

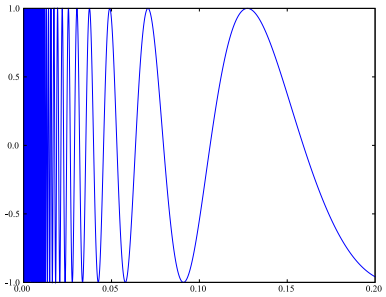
Korollar B9.12. *Die Spur $\gamma([a, b])$ eines Weges γ ist zusammenhängend.*

Beweis. Dies ist der Spezialfall $X = \mathbb{R}$ vom Satz B9.7. □

Definition B9.13. Ein Raum X heißt *wegzusammenhängend*, falls es zu je zwei Punkten $x, y \in X$ einen Weg in X von x nach y gibt.

Beispiel B9.14. Es gibt zusammenhängende Räume, die nicht wegzusammenhängend sind. Das gebräuchlichste Beispiel, die sogenannte „Sinuskurve der Topologen“, ist

$$S := \left\{(x, \sin {}^1\!/_x) : x \in (0, 1]\right\} \cup \left\{(0, y) : y \in [-1, 1]\right\} \subset \mathbb{E}^2.$$



Satz B9.15. *Ein wegzusammenhängender Raum ist zusammenhängend.*

Beweis. Sei X ein nichtzusammenhängender Raum. Dann gibt es nichtleere, disjunkte, offene Teilmengen $U, V \subset X$ mit $U \cup V = X$. Jede zusammenhängende Teilmenge $T \subset X$ ist entweder in U oder in V enthalten. Mit Korollar B9.12 gibt es deshalb keinen Weg von einem Punkt $u \in U$ nach einem Punkt $v \in V$. Damit ist X nicht wegzusammenhängend. □