D. VEKTORWERTIGE FUNKTIONEN AUF EINEM INTERVALL

In diesem Abschnitt sei W ein Banachraum, d.h. ein vollständiger normierter Vektorraum. Fast alle Sätze über reelle Reihen (aus I.C) konnten wir leicht auf Reihen in W erweitern (im Abschnitt C3).

Ähnlich der Reihensumme sind auch Ableitungen bzw. Integrale als Grenzwerte von linearen Operationen (Differenzenquotienten bzw. Riemann'schen Summen) definiert. Damit können wir deren Definitionen leicht auf vektorwertige Funktionen übertragen.

D1. Ableitungen vektorwertiger Funktionen

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und sei $f : I \to W$ eine Abbildung, eine vektorwertige Funktion auf I.

Bemerkung D1.1. Falls $f : I \to W$ stetig ist, ist f ein *Weg* oder eine *(parametrisierte) Kurve* im Raum W.

Wir können die Ableitung von f in $p \in I$ genau so definieren, wie im Falle $W = \mathbb{R}$:

Definition D1.2. [Vgl. I.E1.1.] Die Abbildung $f : I \to W$ heißt *differenzierbar* in $p \in I$, falls der Limes

$$f'(p) := \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = \lim_{h \to 0} \frac{f(p+h) - f(p)}{h} \in W$$

existiert. Dann heißt $f'(p)$ die *Ableitung* von f in p.

Beispiel D1.3. [Vgl. I.E1.2.] Für $v, w \in W$ heißt $f(t) := tv + w$ eine *affin lineare Funktion* $\mathbb{R} \to W$. Sie hat in jedem $t \in \mathbb{R}$ die Ableitung $f'(t) = v$.

Bemerkung D1.4. [Vgl. I.E1.5.] Falls $f : I \to W$ differenzierbar in p ist, dann ist f in p stetig, weil für $x \to p$ gilt $f(x) - f(p) \to f'(p) \cdot 0$.

Bemerkung D1.5. Die Ableitung $f'(t) \in W$ heißt auch *Tangentenvektor* der parametrisierten Kurve f im Punkt $f(t)$. Wenn man den Parameter t als Zeit betrachtet, ist $\dot{f}(t) = f'(t)$ die *Geschwindigkeit* der Kurve. Die Norm $\left\|\dot{f}(t)\right\|$ nennt man auch *Schnelligkeit* der Kurve.

Lemma D1.6. [Vgl. I.E1.17.] *Eine Funktion $f : I \to W$ ist genau dann differenzierbar in $p \in I$, wenn es eine Funktion $f_1 : I \to W$ so gibt, dass $f(x) = f(p) + (x-p) f_1(x)$ und f_1 in p stetig ist. Es gilt dann $f'(p) = f_1(p)$.*

Beweis. Für $x \neq p$ ist $f_1(x)$ nichts anders als der Differenzenquotient $\frac{f(x)-f(p)}{x-p}$. Diese Funktion hat genau dann eine stetige Erweiterung auf $x = p$, wenn die Ableitung $f'(p)$ existiert. □

Satz D1.7. [Vgl. I.E1.9.] *Seien $f, g : I \to W$ und $h : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $p \in I$. Dann sind auch $f \pm g$ und hf in p differenzierbar und es gelten die Rechenregeln*

$$(f \pm g)'(p) = f'(p) \pm g'(p), \quad (hf)'(p) = h'(p) f(p) + h(p) f'(p).$$

Beweis. Weil die Regeln für $f \pm g$ noch einfacher sind, betrachten wir nur die Produktregel. Wir benutzen die Funktionen $f_1 : I \to W$ und $h_1 : I \to \mathbb{R}$ aus dem Lemma. Aus

$$f(x) = f(p) + (x-p) f_1(x), \quad h(x) = h(p) + (x-p) h_1(x)$$

folgt

$$(hf)(x) = (hf)(p) + (x-p) s_1(x)$$

mit

$$s_1(x) := h(p) f_1(x) + h_1(x) f(p) + (x-p) f_1(x) h_1(x).$$

Die Funktion s_1 ist in p stetig mit Wert $s_1(p) = h(p) f_1(p) + h_1(p) f(p)$. Aus dem Lemma (nochmal) folgt die Produktregel. □

Satz D1.8. [Vgl. I.E1.19.] *Seien $I, J \subset \mathbb{R}$ Intervalle und seien $f : I \to W$ und $g : J \to I$ differenzierbare Abbildungen. Dann gilt die Kettenregel*

$$(f \circ g)'(p) = f'(g(p))\, g'(p).$$

Beweis. (Aufgabe.) □

D2. Endlich-dimensionale Banachräume

Nun sei W endlich-dimensional, $\dim W = n$. Jede Basis $\{w_1, \dots, w_n\}$ für W gibt uns durch

$$(a_1, \dots, a_n) \mapsto a_1 w_1 + \cdots + a_n w_n = \sum a_i w_i$$

einen Isomorphismus $\mathbb{R}^n \to W$.

Wir wissen schon, alle ℓ^p-Normen auf $\mathbb{R}^n$ sind äquivalent (Lemma B4.7). Darüber hinaus gilt:

Lemma D2.1. *Alle Normen auf einem endlich-dimensionalen Raum W sind äquivalent.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, $W = \mathbb{R}^n$. Sei $\{e_i\}$ die kanonische Basis für $\mathbb{R}^n$ und sei $\|\cdot\|$ eine beliebige Norm. Es reicht aus zu zeigen, dass diese Norm und die ℓ^1-Norm äquivalent sind.

Mit $M := \max_i \|e_i\|$ gilt aus der Dreiecksungleichung

$$\|v\| = \left\|(v_1, \dots v_n)\right\| \le \sum |v_i| \, \|e_i\| \le M \sum |v_i| = M \|v\|_1.$$

Es folgt, dass

$$\left| \|v\| - \|w\| \right| \le M \|v - w\|_1.$$

Das heißt, die Funktion $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $v \mapsto \|v\|$ ist Lipschitz bezüglich der ℓ^1-Metrik, insbesondere stetig bezüglich der Standardtopologie auf $\mathbb{R}^n$.

Damit hat $\|\cdot\|$ auf der kompakten ℓ^1-Einheitssphäre

$$S_1 := \{v \in \mathbb{R}^n : \|v\|_1 = 1\}$$

ein Minimum m. Weil $\|v\| > 0$ für $v \neq 0$ (insbes. für $v \in S_1$), gilt $m > 0$. Es folgt, dass $\|v\| \ge m \|v\|_1$ für alle $v \in \mathbb{R}^n$. Mit

$$m \|v\|_1 \le \|v\| \le M \|v\|_1$$

sind $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_1$ äquivalent. □

Korollar D2.2. *Ein endlich-dimensionaler Vekttorraum W ist mit jeder Norm vollständig, d.h. ein Banachraum.* □

Korollar D2.3. *Sei W ein endlich-dimensionaler Vektorraum und $f\colon I \to W$ eine Abbildung. Die Differenzierbarkeit von f und die Ableitungen $f'(p)$ sind unabhängig von der Norm auf W.* □

Bemerkung D2.4. Das heißt, die (Vektor-)Geschwindigkeit $\gamma'(t)$ einer Kurve γ im endlich-dimensionalen Raum W ist unabhängig von der Norm $\|\cdot\|$ auf W hängt natürlich Deren Norm $\|\gamma'(t)\|$ – die Schnelligkeit von γ – hängt natürlich von der ausgewählten Norm ab.

Satz D2.5. *Sei $f : I \to \mathbb{R}^n$ eine Abbildung, $f = (f_1, \dots, f_n)$. Die Abbildung f ist genau dann in p differenzierbar, wenn jedes $f_i : I \to \mathbb{R}$ in p differenzierbar ist. Es gilt*

$$f'(p) = (f_1'(p), \dots, f_n'(p)).$$

Beweis. Die Ableitung ist per Definition ein Limes. Mit Lemma B6.31 können wir diesen Limes komponentenweise betrachten. □

Später werden wir Ableitungen auch für Funktionen auf einem Banachraum V betrachten. Wegen folgenden Satzes ist es wichtig, dass V endlich-dimensional ist.

Satz D2.6. *Seien V und W Banachräume und sei $L\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Falls V endlich-dimensional ist, ist L eine Lipschitzabbildung (und damit stetig).*

Beweis. Falls $\dim V = n$, dürfen wir annehmen, $V = \mathbb{R}^n$ mit der ℓ^1-Norm. Sei $w_i := L(e_i) \in W$ für $i = 1, \dots, n$ und sei $\lambda := \max \|w_i\|$. Für $v = (v_1, \dots, v_n)$ gilt dann

$$\big\|L(v)\big\| = \Big\|\sum v_i w_i\Big\| \le \sum |v_i|\,\|w_i\| \le \lambda \sum |v_i| = \lambda\,\|v\|_1.$$

Damit ist λ eine Lipschitzkonstante für L. □

Ende der Vorlesung 2009 Januar 5

D3. Mehr über Ableitungen

Definition D3.1. Sei $f\colon I \to W$ differenzierbar. Genau wie im reellen Fall heißt f *stetig differenzierbar*, falls $f'\colon I \to W$ stetig ist.

Bemerkung D3.2. Für Ableitungen reeller Funktionen – auch wenn diese unstetig sind – hatten wir einen Zwischenwertsatz (I.F4.1). Dieser macht keinen Sinn mehr für vektorwertige Funktionen, weil $f'(I)$ eine Teilmenge von W (und nicht von $\mathbb{R}$) ist.

Beispiel D3.3. Der Mittelwertsatz (I.E2.4) hingegen macht immer noch Sinn für vektorwertige Funktionen: wir können die Frage stellen, ob es $c \in [a, b]$ gibt mit $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Die Antwort ist aber „nein“, der Mittelwertsatz stimmt einfach nicht mehr. Sei z.B. $f(t) := (\cos t, \sin t) \in \mathbb{R}^2$ für $t \in [0, 2\pi]$. Es gilt $f(2\pi) = f(0)$; weil $f'(t) = (-\sin t, \cos t)$, gibt es aber kein t mit $f'(t) = (0, 0)$.

Folgender Satz ist im Falle $W = \mathbb{R}$ ein unmittelbares Korollar des Mittelwertsatzes.

Satz D3.4. *Sei $f\colon [a, b] \to W$ stetig und in jedem inneren Punkt differenzierbar. Setze $M := \sup\{\|f'(t)\| : t \in (a, b)\}$. Dann gilt $\big\|f(b) - f(a)\big\| \le M(b - a)$.*

Beweis. Im Falle $M = \infty$ gibt es nichts zu beweisen. Sonst sei $c \in (a, b)$ und sei $M < C \in \mathbb{R}$. Wir setzen

$$S := \big\{t \in [c, b] : \big\|f(t) - f(c)\big\| \le C(t - c)\big\}$$

und $s := \sup S$. Weil S nicht leer ist ($c \in S$), gilt $s \in [c, b]$. Weil f stetig ist, ist S abgeschlossen und damit gilt $s \in S$. Wir behaupten, $s = b$. Dann gilt $\big\|f(b) - f(c)\big\| \le C(b - c)$ und zwar für jedes $C > M$, also $\big\|f(b) - f(c)\big\| \le M(b - c)$. Weil dies für jedes $c \in (a, b)$ gilt und f stetig ist, gilt

$$\big\|f(b) - f(a)\big\| \le M(b - a).$$

Wir beweisen die Behauptung indirekt. Falls $s < b$, sei $t \in (s, b)$. Aus der Dreiecksungleichung gilt

$$\big\|f(t) - f(c)\big\| \le \big\|f(t) - f(s)\big\| + C(s - c).$$

Aus der Differenzierbarkeit von f in s folgt, dass

$$\frac{\big\|f(t) - f(s)\big\|}{t - s} \to \|f'(s)\| < C$$

für $t \to s$. Deshalb gibt es $\delta > 0$ so, dass für $s < t < s + \delta$ gilt

$$\big\|f(t) - f(s)\big\| \le C(t - s)$$

und damit

$$\big\|f(t) - f(c)\big\| \le C(t - c).$$

Das heißt, $t \in S$, was die Definition von s widerspricht. □

Korollar D3.5. [Vgl. I.E2.8.] *Seien $f, g\colon I \to W$ differenzierbar mit $f' \equiv g'$. Dann gibt es $w \in W$ mit $f(x) - g(x) \equiv w$.*

Beweis. Sei $h = f - g$. Es gilt $h' \equiv 0$. Für alle $a < b \in I$ sagt der Satz, $\|h(b) - h(a)\| \le 0$, d.h., $h(b) = h(a)$. □

Definition D3.6. Höhere Ableitungen für vektorwertige Funktionen $f\colon I \to W$ definieren wir genau wie im reellen Fall:

$$f^{(k+1)} := (f^{(k)})';$$

Taylorpolynome bzw. Taylorreihen auch so:

$$\sum_k f^{(k)}(p)\frac{(x - p)^k}{k!}.$$

D4. Integrale vektorwertiger Funktionen

Seien $[a,b] \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, X ein metrischer Raum und $f\colon [a,b] \to X$ eine Funktion. Treppen- bzw. Regelfunktionen definiert man genau wie im Falle $X = \mathbb{R}$.

Definition D4.1. Die Funktion $f\colon [a,b] \to X$ heißt *Treppenfunktion*, falls sie stückweise konstant ist, d.h. konstant auf jedem offenen Teilintervall (z_{j-1}, z_j) einer Treppenzerlegung Z. Sie heißt *Regelfunktion*, falls alle einseitigen Grenzwerte $f(p^{\pm})$ existieren.

Satz D4.2. [Vgl. A3.5.] *Sei X vollständig. Eine Funktion $f\colon [a,b] \to X$ ist genau dann eine Regelfunktion, wenn es eine Folge (φ_k) von Treppenfunktionen gibt, die gegen f gleichmäßig konvergiert.*

Beweisidee. Der Beweis des Satzes – und die Beweise der zwei Lemmata – gelten ungeändert, wenn man einfach alle Begriffe der Form $|f(x) - f(y)|$ mit $d(f(x), f(y))$ ersetzt. Die Vollständigkeit wird (nur) am Ende des zweiten Lemmas benutzt, um einen einseitigen Grenzwert zu finden. □

Obwohl wir diesen Satz allgemein für vollständige metrische Räume bewiesen haben, haben wir nur an dem Fall Interesse, wo $X = W$ ein Banachraum ist. Nur in einem Vektorraum können wir Riemann'sche Summen als lineare Kombinationen definieren.

Definition D4.3. [Vgl. A4.1.] Sei $f\colon [a,b] \to W$ eine Funktion und $\dot{Z}$ eine markierte Zerlegung von $[a,b]$. Die *Riemann'sche Summe* von f bezüglich $\dot{Z}$ ist

$$S(f,\dot{Z}) := \sum_{j=1}^{k} \Delta z_j \, f(\xi_j) = \sum_{j=1}^{k} (z_j - z_{j-1}) \, f(\xi_j).$$

Sei nun $\varphi\colon [a,b] \to W$ eine Treppenfunktion. Das *(Treppen-)Integral* von φ ist

$$\int_a^b \varphi := S(\varphi,\dot{Z}),$$

wo $\dot{Z}$ eine beliebige Treppenzerlegung für φ ist.

Bemerkung D4.4. Dass das Treppenintegral wohldefiniert ist, folgt aus einem Analogon zu Lemma A4.2, das wir nicht explizit aufschreiben.

Folgendes Lemma gilt genau wie im reellen Fall:

Lemma D4.5. [Vgl. A4.4.] *Es gelten Linearität und Intervalladditivität:*

$$\int_a^b (f + cg) = \int_a^b f + c \int_a^b g,$$
$$\int_a^b f = \int_a^p f + \int_p^b f.$$

Lemma D4.6. *Es gilt*

$$\left\| \int f \right\| \le \int \|f\|.$$

Beweis. Sei $\dot{Z}$ eine markierte Treppenzerlegung für f. Dann ist $\dot{Z}$ auch für die Treppenfunktion $\|f\|\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Treppenzerlegung. Es gilt

$$\begin{aligned} \left\| \int f \right\| = \left\| S(f,\dot{Z}) \right\| &= \left\| \sum \Delta z_j \, f(\xi_j) \right\| \\ &\le \sum \left\| \Delta z_j \, f(\xi_j) \right\| = \sum \Delta z_j \left\| f(\xi_j) \right\| \\ &= S(\|f\|,\dot{Z}) = \int \|f\|, \end{aligned}$$

wo die Ungleichung in der Mitte die Dreiecksungleichung für W ist. □

Bemerkung D4.7. Für reelle Integrale folgte diese Ungleichung aus der Monotonie ($f \ge 0 \implies \int f \ge 0$). Für vektorwertige Integrale macht Monotonie natürlich keinen Sinn.

Lemma D4.8. [Vgl. A4.8.] *Sei $f\colon [a,b] \to W$ eine Regelfunktion, und (φ_n) eine Folge von Treppenfunktionen, die gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann konvergiert in W die Folge $\left(\int_a^b \varphi_n\right)$. Der Grenzwert ist unabhängig von der gewählten Folge (φ_n); wir nennen ihn das* (Regel-)Integral $\int_a^b f$.

Beweisskizze. Der Beweis, dass $\left(\int_a^b \varphi_n\right)$ eine Cauchyfolge ist, geht genau wie im reellen Fall. Weil W vollständig ist, konvergiert diese Cauchyfolge. □

Bemerkung D4.9. Aus den obigen Eigenschaften des Treppenintegrals folgen unmittelbar dieselben für das Regelintegral: Linearität, Intervalladditivität und die Ungleichung $\left|\int f\right| \le \int |f|$.

Bemerkung D4.10. Uneigentliche Integrale definiert man wie im reellen Fall als Grenzwerte eigentlicher Integrale. Man kann auch Riemann- bzw. Lebesgue- bzw. Gauge-Integrale für vektorwertige Funktionen definieren. Wie im reellen Fall ist jedes Regelintegral auch ein Riemann-Integral:

$$\int_a^b f = \lim_{\Delta(Z)\to 0} S(f,\dot{Z}).$$

Bemerkung D4.11. [Vgl. A4.11.] Man kann natürlich den Mittelwert definieren

$$⨍_a^b f := \frac{\int_a^b f}{\int_a^b 1} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f,$$

der Mittelwertsatz der Integralrechnung (A4.12) gilt aber nicht für verktorwertige Funktionen. (Beispiel D3.3 kann man hier wieder verwenden.) Man hat aber immer noch eine wichtige Folgerung: Falls $\|f\| \le \varepsilon$ auf $[a,b]$ gilt, dann gilt

$$\left\| ⨍_a^b f \right\| \le ⨍_a^b \|f\| \le \varepsilon.$$

Ende der Vorlesung 2009 Januar 8

Im Falle eines endlich-dimensionalen Banachraums W kann man natürlich komponentenweise integrieren:

Satz D4.12. *Eine Funktion*

$$f = (f_1, \dots, f_n) \colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$$

ist genau dann eine Regelfunktion, wenn jedes f_i eine Regelfunktion ist. Dann gilt

$$\int_a^b f = \Big(\int_a^b f_1, \dots, \int_a^b f_n \Big).$$

Beweis. (Aufgabe.) □

D5. Der Hauptsatz

Unbestimmte Integrale, Stammfunktionen und der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung kann man auch leicht auf vektorwertige Funktionen übertragen.

Definition D5.1. [Vgl. A5.3.] Sei $f \colon [a,b] \to W$ eine Regelfunktion und sei $c \in [a,b]$. Die Funktion $F \colon [a,b] \to W$, definiert durch

$$F(p) := \int_c^p f(x)\,dx,$$

heißt ein *unbestimmtes Integral* von f.

Satz D5.2. [Vgl. A5.4.] *Sei $f \colon [a,b] \to W$ eine Regelfunktion. Ein unbestimmtes Integral F von f ist stetig und hat in jedem $p \in [a,b]$ einseitige Ableitungen $F'_\pm(p) = f(p^\pm)$. Falls f in p stetig ist, folgt, dass F in p differenzierbar ist mit $F'(p) = f(p)$.*

Beweisskizze. Wie im reellen Fall gilt

$$F'_+(p) = \lim_{h \to 0^+} \fint_p^{p+h} f.$$

Weil f eine Regelfunktion ist, existiert $f(p^+)$. D.h.,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in (p, p+\delta) \quad \big\| f(p^+) - f(x) \big\| < \varepsilon.$$

Für $h < \delta$ gilt dann aus Bemerkung D4.11, dass

$$\Big\| f(p^+) - \fint_p^{p+h} f \Big\| < \varepsilon.$$

Es folgt, dass

$$f(p^+) = \lim_{h \to 0^+} \fint_p^{p+h} f = F'_+(p).$$

Ähnliches gilt für die linksseitigen Ableitungen. □

Definition D5.3. [Vgl. A5.5.] Sei $f \colon [a,b] \to W$ stetig. Eine stetig differenzierbare Funktion $\Phi \colon [a,b] \to W$ mit $\Phi' = f$ heißt eine *Stammfunktion* für f.

Satz D5.4. [Vgl. A5.7.] *Sei $f \colon [a,b] \to W$ stetig. Für jedes $c \in [a,b]$ ist das unbestimmte Integral $F(x) := \int_c^x f$ eine Stammfunktion für f. Sei nun Φ eine beliebige Stammfunktion für f. Für $p, q \in [a,b]$ gilt*

$$\int_p^q f = \Phi(q) - \Phi(p) =: \Phi\Big|_p^q.$$

Beweis. Weil f stetig ist, sagt Satz D5.2, dass $F' \equiv f$. D.h., F ist eine Stammfunktion. Aus Korollar D3.5 hat jede Stammfunktion die Form $\Phi = F + w$ für $w \in W$. Aus Intervalladditivität folgt, dass

$$\Phi\Big|_p^q = F\Big|_p^q = \int_p^q f. \qquad \square$$

D6. Schlusswort

In diesem Abschnitt haben wir Ableitungen und Integrale für Funktionen mit Werten in einem Banachraum W betrachtet. Wie wir gesehen haben, ist die Theorie weitgehend unabhängig von W und kommt dem Falle $W = \mathbb{R}$ fast gleich.

Wenn wir nur an endlich-dimensionalen Räumen W Interesse hätten, könnten wir einfach sagen: Man wählt eine Basis, $W \cong \mathbb{R}^n$, und alles wird komponentenweise gemacht.

Hingegen ziehen wir (auch im Falle $\dim W < \infty$) einen anderen Gesichtspunkt vor. Die Wahl einer Basis ist unwichtig. Ableitungen und Integrale sind lineare Verfahren. Die Definitionen, Ergebnisse und Beweise kann man direkt mit Vektoren betrachten.