WS 2008/09
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

11. Übungsblatt Analysis II

Abgabe: 13.01.2009

Übungsaufgaben

1. (a) Sei $z_0 \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^+$ und $f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^n}$. Berechnen Sie für $r > 0$ das Integral $\int_{\partial K_r(z_0)} f(z)dz$, wobei $K_r(z_0) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| \leq r\}$.
   (b) Sei $f(x + iy) = x + 2iy$. Berechnen Sie $\int_{\gamma_j} f(z)dz$ für $j \in \{1, 2\}$, wobei

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} 2t & \text{für } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ 1 + i2(t - \frac{1}{2}) & \text{für } t \in (\frac{1}{2}, 1], \end{cases}$$
$$\gamma_2(t) = (1 + i)t \text{ für } t \in [0, 1].$$

2. Beweisen Sie folgende Aussage: Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $f : G \to \mathbb{C}$ stetig mit $\int_\gamma f(z)dz = 0$ für jeden geschlossenen Integrationsweg γ in G. Dann hat f auf G eine Stammfunktion.

3. Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet, $U \subseteq G$ offen, $\Delta \subseteq U$ ein abgeschlossenes Dreieck und $f : U \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass gilt: $\int_{\partial\Delta} f(z)dz = 0$.

Tutoriumsaufgaben

1. (a) Zeigen Sie: für $|z| \leq 1 + \frac{m}{2}$ $(m \in \mathbb{N})$ gilt $e^z = \sum_{n=0}^{m} \frac{z^n}{n!} + r_m(z)$, wobei $|r_m(z)| \leq \frac{2|z|^{m+1}}{(m+1)!}$.
   (b) Zeigen Sie mit (a): $e^z = \lim_{\nu\to\infty}(1 + \frac{z}{\nu})^\nu$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
   (c) Zeigen Sie mit (a): e ist irrational.

2. Zeigen Sie, dass für $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w,$$
$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w.$$

3. Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{5^k}{k+1} z^{2k}$ mit der Definition und dem Quotientenkriterium.

4. Sei R der Konvergenzradius der Reihe $\sum a_k z^k$. Bestimmen sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum a_k z^{2k}$.

Hausaufgaben

11.1 Sei $\sum a_\nu$ eine Reihe in einem Banachraum V. Zeigen Sie: ist $\overline{\lim}\frac{\|a_{\nu+1}\|}{\|a_\nu\|} < 1$, so ist $\sum a_\nu$ absolut konvergent. (Entsprechend gilt: ist $\underline{\lim}\frac{\|a_{\nu+1}\|}{\|a_\nu\|} > 1$, so ist $\sum a_\nu$ divergent; dies muss nicht bewiesen werden.) (4 Punkte)

11.2 (4 Punkte)

(a) Sei $\sum a_n(z - z_0)^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R. Ist $a_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|,$$

falls der Grenzwert in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ existiert.

(b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius von $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} z^n$ für $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{N}$.

11.3 (7 Punkte)

(a) Beweisen Sie die MOIVREsche Formel ($n \in \mathbb{N}, \varphi \in \mathbb{R}$):

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

(b) Ermitteln Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = 8i$.

(c) Ein Student berechnet den Betrag von e^{iz} wie folgt: Wegen $e^{iz} = \cos z + i\sin z$ gilt: $|e^{iz}| = \sqrt{\cos^2 z + \sin^2 z} = 1$. Für die $z = i$ gilt jedoch: $|e^{iz}| = \frac{1}{e}$. Wo steckt der Fehler und wie ist die Rechnung richtig auszuführen?