WS 2008/09
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

12. Übungsblatt Analysis II

Abgabe: 20.01.2009

Übungsaufgaben

1. Blatt 10, Aufgabe 3.
2. Blatt 8, Aufgabe 4.

Tutoriumsaufgaben

1. Beweisen Sie Satz D1.8 aus der Vorlesung: Seien $I, J \subseteq \mathbb{R}$ Intervalle, W ein Banachraum und seien $f : I \to W$ und $g : J \to I$ differenzierbare Abbildungen. Dann gilt die Kettenregel:
$$(f \circ g)'(p) = f'\big(g(p)\big)g'(p).$$
2. Beweisen Sie Satz D.4.13 aus der Vorlesung:
   (a) Eine Funktion $f = (f_1, \ldots, f_n) : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ist genau dann eine Regelfunktion, wenn jedes f_i eine Regelfunktion ist $(i = 1, \ldots, n)$.
   (b) Falls eine der beiden äquivalenten Aussagen in (a) erfüllt ist, so gilt:
$$\int_a^b f = \Big(\int_a^b f_1, \ldots, \int_a^b f_n\Big).$$
3. Ist die Funktion definiert durch
$$f(z) := |z|^2$$
   in i komplex differenzierbar?

Hausaufgaben

12.1 (7 Punkte)

(a) Skizzieren Sie folgende Mengen in der komplexen Ebene:

$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1 - \operatorname{Re} z\},$$
$$M_2 := \left\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \frac{1}{z} = \frac{1}{2}\right\}.$$

(b) Ist die Funktion definiert durch

$$f(z) := \begin{cases} \frac{z^3}{\bar{z}^2} & z \neq 0, \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

in 0 komplex differenzierbar?

12.2 Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(z^2+b^n)z^n$, wobei $b \in \mathbb{C}$. (5 Punkte)

12.3 In welchen Punkten $p \in [-1,1]$ ist die Abbildung $f : [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$f(0) := (0,0), \qquad f(t) := (t, t\sin\frac{\pi}{t}),\ t \neq 0$$

differenzierbar? (3 Punkte)