WS 2008/09
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

13. Übungsblatt Analysis II

Abgabe: 27.01.2009

Übungsaufgaben

1. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert mit

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 0 & \text{für } x_2 \leq 0 \text{ oder } x_2 \geq x_1^2, \\ 1 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   (a) Skizzieren Sie den Träger $\operatorname{supp} f := \operatorname{cl}\{x \in \mathbb{R}^2 : f(x) \neq 0\}$ von f.

   (b) Berechnen Sie das Richtungsdifferential $\partial_h f(0,0)$ für beliebiges $h \in \mathbb{R}^2$.

2. Beweisen Sie Lemma E2.10 aus der Vorlesung.

3. Zeigen Sie, dass die folgenden Funktionen f in p differenzierbar sind und bestimmen Sie die Ableitungen:

   (a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit $f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2^2$, $f_2(x_1, x_2) = 2x_1x_2$, $p = (p_1, p_2)$ beliebig,

   (b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ affin, $p \in \mathbb{R}^n$ beliebig,

   (c) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ mit $f(x) = g(x, x)$, wobei $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ bilinear, $p \in \mathbb{R}^n$ beliebig.

4. Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0,0), \\ \frac{x_1 x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0,0). \end{cases}$$

   Ist f an der Stelle $p = (0,0)$ differenzierbar?

Tutoriumsaufgaben

1. (a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mittels der Definition, wobei

$$f(x, y) = 1 + x^2.$$

(b) Geben Sie die partiellen Ableitungen von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ in $p = (x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}^3$ ($z_0 \neq 0$) an, wobei

$$f(x, y, z) = \frac{x \exp y}{z} \qquad (z \neq 0).$$

2. Bestimmen Sie für $z = f(x_1, x_2) = \exp(x_2 - x_1^2)$ diejenigen Punkte $\bar{x}$ auf der Höhenlinie $z = 1$, in denen das Richtungsdifferential $\partial_h f(\bar{x})$ in Richtung des Vektors $h = (1, 2)$ die Werte 0 bzw. -2 annimmt.

3. Gegeben sei die Fläche $z = f(x, y) = x^2 - 5y^2$. Wie lautet die Gleichung der Tangentialebene an die Fläche im Punkt $(2, 1, \bar{z})$?

4. Beweisen Sie Satz E3.1 aus der Vorlesung.

Hausaufgaben

13.1 (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ in $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ mittels der Definition, wobei

$$f(x, y) = (x + y^2, x^2 y).$$

(b) Geben Sie die partiellen Ableitungen von $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $p = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ an, wobei

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

und $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ differenzierbar ist (Begründung).

13.2 Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert mit (5 Punkte)

$$f(x_1, x_2) := \begin{cases} 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0), \\ \frac{x_1^2 x_2}{x_1^4 + x_2^2} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) Das Richtungsdifferential $\partial_h f(0, 0)$ existiert für alle $h \in \mathbb{R}^2$.

(b) Die Zuordnung $h \mapsto \partial_h f(0, 0)$ ist nicht linear.

13.3 Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch (4 Punkte)

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} 0 & \text{für } (x_1, x_2) = (0, 0), \\ \frac{x_1 x_2^3}{x_1^2 + x_2^4} & \text{für } (x_1, x_2) \neq (0, 0). \end{cases}$$

Ist f an der Stelle $p = (0, 0)$ differenzierbar?