WS 2008/09
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

2. Übungsblatt Analysis II

Abgabe: 28.10.2008

Übungsaufgaben

1. Beweisen Sie folgende Aussage: Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Jede monotone Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ ist eine Regelfunktion. Ist f monoton wachsend, so gilt
$$\lim_{x \to \bar{x}^-} f(x) \leq f(\bar{x}) \leq \lim_{x \to \bar{x}^+} f(x)$$
für jedes $\bar{x} \in [a, b]$ (soweit der Grenzwert sinnvoll ist).

2. Auf dem ersten Übungsblatt (Aufgabe 2) wurde die Funktion $f_3 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ mit
$$f_3(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ \frac{1}{n+1} & \text{für } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}^+) \end{cases}$$
untersucht. Berechnen Sie durch gleichmäßige Approximation mit Treppenfunktionen das Integral $\int_0^1 f_3$.

3. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Abbildung $\mathcal{T}_{[a,b]} \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \mapsto \int_a^b \varphi$ linear ist. Zeigen Sie weiterhin, daß für alle $\varphi \in \mathcal{T}_{[a,b]}$ gilt:
$$\varphi \geq 0 \implies \int_a^b \varphi \geq 0. \tag{1}$$

4. Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß die Abbildung $\mathcal{R}_{[a,b]} \to \mathbb{R}$ mit $f \mapsto \int_a^b f$ linear ist. Zeigen Sie außerdem, daß das Regelintegral intervalladditiv ist.

Tutoriumsaufgaben

1. Berechnen Sie durch gleichmäßige Approximation mit Treppenfunktionen die Integrale
   (a) $\int_0^a x^2 dx$ $(a > 0)$ (Hinweis: äquidistante Zerlegung von $[0, a]$),
   (b) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ (Hinweis: Zerlegungspunkte von $[1, 2]$ sollten geometrische Folge bilden).

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und (f_n) eine Folge von Regelfunktion, die auf dem Intervall $[a, b]$ gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Ist f wieder eine Regelfunktion?

Hausaufgaben

2.1 In der Vorlesung wurde gezeigt, daß Regelfunktionen durch Treppenfunktionen gleichmäßig approximiert werden können. Zeigen Sie mittels dieser Aussage, daß Regelfunktionen beschränkt sind. (3 Punkte)

2.2 (a) Auf dem ersten Übungsblatt (Aufgabe 2) wurde die Funktion $f_2 : [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f_2(x) = \frac{1}{n}\lfloor nx \rfloor \quad \text{für festes } n \in \mathbb{N}^+$$

untersucht. Berechnen Sie $\int_0^1 f_2$ (Hinweis: $\sum_{i=0}^{n} i = \frac{(n+1)n}{2}$). (3 Punkte)

(b) Berechnen Sie durch gleichmäßige Approximation mit Treppenfunktionen das Integral $\int_0^1 e^x dx$ (Hinweis: äquidistante Zerlegung von $[0,1]$). (5 Punkte)

2.3 Seien $a, b \in \mathbb{R}$. (6 Punkte)

(a) Zeigen Sie mittels der Übungsaufgabe 3 von diesem Übungsblatt, daß für $\varphi, \psi \in \mathcal{T}_{[a,b]}$ gilt:

$$\varphi \leq \psi \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b \varphi \leq \int_a^b \psi.$$

(b) Zeigen Sie, daß für $f, g \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ gilt:

$$f \leq g \quad \Longrightarrow \quad \int_a^b f \leq \int_a^b g.$$