WS 2008/09
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

3. Übungsblatt Analysis II

Abgabe: 04.11.2008

Übungsaufgaben

1. Seien $B, C, b, c \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

$$\int \frac{Bx + C}{x^2 + 2bx + c} dx.$$

   Ermitteln Sie hiermit eine Stammfunktion von $\int \frac{x+1}{x^4 - x} dx$.

2. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig mit $f \geq 0$ und $\int_a^b f = 0$. Zeigen Sie, daß dann $f(x) = 0$ für alle $x \in [a, b]$ ist. Ist diese Behauptung auch richtig, wenn die Voraussetzung der Stetigkeit von f durch $f \in \mathcal{R}_{[a,b]}$ ersetzt wird?

3. Beweisen Sie folgende Aussage: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und (f_j) eine Folge von Regelfunktionen auf $[a, b]$, so daß $\sum_{j=0}^{\infty} f_j$ auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen eine Funktion f konvergiert. Dann ist f eine Regelfunktion und es gilt

$$\int_a^b f = \sum_{j=0}^{\infty} \int_a^b f_j.$$

4. Berechnen Sie folgende Integrale mit der Substitutionsregel:

   (a) $\int_0^1 \frac{1}{(5x+2)^3} dx$,

   (b) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx$,

   (c) $\int_0^2 \frac{x}{x^2+1} dx$.

5. Bestimmen Sie eine Stammfunktion von

   (a) $\int R\big(x, \sqrt[n]{(ax + b)}\big) dx$, $a, b \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$,

   (b) $\int R(e^{ax}) dx$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$,

   (c) $\int R(\cos \varphi, \sin \varphi) d\varphi$.

   Hierbei sei R eine rationale Funktion der Terme in den Klammern.

Tutoriumsaufgaben

1. Seien $x, y \in (0, \infty)$. Zeigen Sie, daß gilt:
   (a) $\int_1^{xy} \frac{1}{t} dt = \int_1^x \frac{1}{t} dt + \int_1^y \frac{1}{t} dt$ (mittels der Substitutionsregel),
   (b) $\int_1^x \frac{1}{t} dt \leq x - 1$.
2. Finden Sie mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung Einschließungen für folgende Integrale:
   (a) $\int_0^{100} \frac{e^{-x}}{x+100} dx$,
   (b) $\int_0^1 \frac{x^{99}}{\arctan(x+99)} dx$.
3. Bestimmen Sie durch Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion von
   (a) $\int \frac{2x^2+41x-91}{(x+3)(x-1)(x-4)} dx$,
   (b) $\int \frac{2x^2+9x+12}{x^2+6x+10} dx$.

Hausaufgaben

3.1 Die Funktionen $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ und $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ seien definiert durch (6 Punkte)

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \in (0,1], \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|} & \text{für } x \in [-1,0) \cup (0,1], \\ 0 & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

$$h(x) = g(f(x)) \text{ für } x \in [0,1].$$

Welche dieser Funktionen sind Regelfunktionen?

3.2 Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Zeigen Sie, daß $g \circ f$ ebenfalls eine Regelfunktion ist. (5 Punkte)

3.3 Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ und $f : [a+c, b+c] \to \mathbb{R}$ sowie $g : [ac, bc] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Beweisen Sie:

(a) $\int_a^b f(x+c) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x) dx$, (2 Punkte)

(b) $\int_a^b g(cx) dx = \frac{1}{c} \int_{ca}^{cb} g(x) dx$, wobei $c \neq 0$. (2 Punkte)