WS 2008/09
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

4. Übungsblatt Analysis II

Abgabe: 11.11.2008

Übungsaufgaben

1. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Es sei f auf $[-1,1]$ unendlich oft differenzierbar, f sei gerade und es gelte für $x \in [-1,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}^+$:
   $$f^{(2n)}(x) \geq 0.$$
   Dann wird f auf $(-1,1)$ durch die Taylorreihe von f an der Stelle 0 dargestellt.

   (b) Es sei f auf $[-1,1]$ unendlich oft differenzierbar und es gelte für $x \in [-1,1]$ und alle $n \in \mathbb{N}^+$:
   $$f^{(n)}(x) \geq 0.$$
   Dann wird f auf $(-1,1)$ durch die Taylorreihe von f an der Stelle 0 dargestellt.

   (c) Es sei f auf dem offenen Intervall D unendlich oft differenzierbar und es gelte für alle $x \in D$ und alle $n \in \mathbb{N}^+$:
   $$f^{(n)}(x) \geq 0.$$
   Dann läßt sich f in der Umgebung einer jeden Stelle $a \in D$ durch ihre Taylorreihe darstellen. (Satz von Bernstein)

2. Sei $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch
   $$H(x) = \begin{cases} x - \lfloor x \rfloor - \frac{1}{2} & \text{für } x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Z}, \\ 0 & \text{für } x \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$
   Beweisen Sie die Eulersche Summationsformel: Ist $f : [1,n] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^+$, stetig differenzierbar, so gilt:
   $$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \int_1^n f(x)dx + \frac{1}{2}\big(f(1) + f(n)\big) + \int_1^n H(x)f'(x)dx.$$

Tutoriumsaufgaben

1. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$. Beweisen Sie mittels partieller Integration

$$\int \frac{(2ax+b)^m}{(ax^2+bx+c)^n} dx$$
$$= -\frac{(2ax+b)^{m-1}}{(n-1)(ax^2+bx+c)^{n-1}} + \frac{2a(m-1)}{n-1} \int \frac{(2ax+b)^{m-2}}{(ax^2+bx+c)^{n-1}} dx.$$

2. Bestimmen Sie die Integrale

   (a) $\int e^{ax} \cos bx \; dx$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und $a \neq 0$,

   (b) $\int x^2 \sin x \; dx$.

3. Berechnen Sie, soweit sie vorhanden sind, die folgenden uneigentlichen Integrale:

   (a) $\int_0^\infty \frac{x}{(1+x^2)^2} dx$,

   (b) $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x}} dx$.

4. Berechnen Sie folgende Integrale:

   (a) $\int_0^1 (6x+3) e^{x^2+x+5} dx$,

   (b) $\int_a^b \frac{1}{\sqrt{9+x^2}} dx$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$. (Hinweis: Betrachten Sie die Funktion definiert durch $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$, $x \in \mathbb{R}$.)

Hausaufgaben

4.1 Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $p, q, r \in [a, b]$ drei Punkte in beliebiger Reihenfolge und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine Regelfunktion. Beweisen Sie folgende Aussage: (5 Punkte)

$$\int_p^q f + \int_q^r f = \int_p^r f.$$

4.2 Bestimmen Sie durch Partialbruchzerlegung eine Stammfunktion von (6 Punkte)

   (a) $\int \frac{1}{(x^4-1)(x^2-x+1)} dx$,

   (b) $\int \frac{3x^4}{x^4+5x^2+4} dx$.

4.3 Bestimmen Sie die Integrale (4 Punkte)

   (a) $\int \arctan x \; dx$,

   (b) $\int x \log x \; dx$ $(x > 0)$.