WS 2008/09
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

5. Übungsblatt Analysis II

Abgabe: 18.11.2008

Übungsaufgaben

1. Es sei l^∞ die Menge aller beschränkten (reellen) Zahlenfolgen. Für $x = (a_n)$, $y = (b_n) \in l^\infty$ setzen wir
$$d_\infty(x, y) := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n - b_n| .$$
   (a) Ist diese Definition sinnvoll?
   (b) Ist d_∞ eine Metrik auf l^∞?
   (c) Welche Gestalt hat $U_\varepsilon(x)$ mit $x = (\frac{1}{n})_{n\in\mathbb{N}^+}$ und $\varepsilon > 0$?

2. Es sei (E, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, daß die auf $E \times E$ definierte Funktion
$$\varrho(x, y) := \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$$
   eine Metrik auf $E \times E$ ist. Zeigen Sie ferner, daß diese Metrik zu d äquivalent ist.

3. Beweisen Sie die Hölder'sche Ungleichung: Seien $1 < p, q < \infty$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ und seien $a, b \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt
$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \le \|a\|_p \|b\|_q .$$

Tutoriumsaufgaben

1. Beweisen Sie folgendes Lemma aus der Vorlesung: Jeder normierte Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ ist ein metrischer Raum mit der Metrik $d(v, w) := \|v - w\|$.

2. Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $B[a, b]$ bezeichne die Menge der auf dem Intervall $[a, b]$ definierten beschränkten reellwertigen Funktionen. Weisen Sie nach, daß durch
$$d(f, g) := \sup_{a\le t\le b} |f(t) - g(t)| , \qquad f, g \in B[a, b]$$
   eine Metrik d auf $B[a, b]$ erklärt ist.

3. Es sei (E, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, daß die auf $E \times E$ definierte Funktion

$$\sigma(x, y) := \log(1 + d(x, y))$$

eine Metrik auf $E \times E$ ist. Zeigen Sie ferner, daß diese Metrik zu d äquivalent ist.

Hausaufgaben

5.1 Beweisen Sie folgende Aussage aus der Vorlesung (Bemerkung A4.15): Für stetige Funktionen f und $\Delta(Z) \to 0$ konvergieren die Treppenfunktionen $\varphi(f, \dot{Z})$ gleichmäßig gegen f. (5 Punkte)

5.2 Es sei (E, d) ein metrischer Raum. Beweisen Sie die Gültigkeit (6 Punkte)

(a) der *Dreiecksungleichung 'nach unten'*

$$|d(x, z) - d(y, z)| \leq d(x, y), \quad \text{für alle } x, y, z \in E,$$

(b) der *Viereckungleichung*

$$|d(x, y) - d(z, w)| \leq d(x, z) + d(y, w), \quad \text{für alle } w, x, y, z \in E.$$

5.3 Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei injektiv. Beweisen Sie, daß durch (6 Punkte)

$$d(x, y) := |f(x) - f(y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

eine Metrik d auf $\mathbb{R}$ definiert ist. Welche Gestalt hat die offene Kugel $U_\varepsilon(3)$ bezüglich der Metrik d für $\varepsilon = 1, 2, 3$ und die spezielle Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{für } x \leq 1, \\ x + 2 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$