WS 2008/09
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

# 6. Übungsblatt Analysis II

Abgabe: 25.11.2008

**Definitionen zum 6. Übungsblatt** Seien $(E, d)$ ein metrischer Raum und $M \subseteq E$ eine nichtleere Teilmenge. Ein Punkt $x \in E$ heißt

- Berührungspunkt von $M :\Longleftrightarrow$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt: $B_\varepsilon(x) \cap M \neq \varnothing$,
- Häufungspunkt von $M :\Longleftrightarrow$ für alle $\varepsilon > 0$ gilt: $B_\varepsilon(x) \cap (M \setminus \{x\}) \neq \varnothing$,
- isolierter Punkt von $M :\Longleftrightarrow$ es existiert ein $\varepsilon > 0$ so, dass gilt: $B_\varepsilon(x) \cap M = \{x\}$.

**Übungsaufgaben**

1. Sei $(E, d)$ ein metrischer Raum, $M \subseteq E$ und $x \in E$. Beweisen Sie folgende Aussagen:
   (a) $x$ ist Berührungspunkt von $M \iff$ es existiert eine Folge $(x_n) \subseteq M$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$,
   (b) $x$ ist ein Häufungspunkt von $M \iff$ es existiert eine Folge $(x_n) \subseteq M$ mit $x_n \neq x$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
2. Sei $(E, d)$ ein metrischer Raum, $M \subseteq E$ und $d_M$ die zugehörige induzierte Metrik von $d$ auf $M$. Zeigen Sie: Für $G \subseteq M$ sind äquivalent:
   (a) $G$ ist offen in $M$,
   (b) es existiert eine offene Menge $H$ in $E$, so dass $G = M \cap H$.
3. Sei $X \neq \varnothing$ eine beliebige Menge und sei $B(X)$ die Menge aller beschränkten Funktionen $f : X \to \mathbb{R}$ versehen mit der Metrik
$$d_X(f, g) = \sup_{x\in X} |f(x) - g(x)|, \qquad f, g \in B(X).$$
   Zeigen Sie, dass der metrische Raum $(B(X), d_X)$ vollständig ist.
4. Sei $(E, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $(A_\nu)$ eine Folge nichtleerer, abgeschlossener Teilmengen mit $A_0 \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ und $\lim_{\nu\to\infty} \operatorname{diam}(A_\nu) = 0$. Dann gibt es genau ein $\bar{x} \in \cap_{\nu=0}^{\infty} A_\nu$.

**Tutoriumsaufgaben**

1. Sei $(E, d)$ ein metrischer Raum und $M \subseteq E$ nicht leer. Beweisen oder widerlegen Sie:
   (a) Ein Punkt $x \in M$ ist entweder Häufungspunkt oder isolierter Punkt von $M$.
   (b) Ein innerer Punkt von $M$ ist kein Randpunkt von $M$.
   (c) Ein Randpunkt von $M$ ist kein Häufungspunkt von $M$.
   (d) Ist $M$ endlich, so ist $M$ abgeschlossen.
   (e) Besteht $M$ nur aus isolierten Punkten, so besitzt $M$ keinen Häufungspunkt.
   (f) Die Menge aller Häufungspunkte von $M$ ist eine abgeschlossene Menge.
2. Beweisen Sie folgende Aussage: Sei $(E, d)$ ein metrischer Raum und $M \subseteq E$. Dann sind äquivalent:
   (a) $M$ ist abgeschlossen,
   (b) ist $(x_n)$ eine Folge in $M$, für die es ein $\bar{x} \in E$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$ gibt, so ist $\bar{x} \in M$.
3. Sei $(E, d)$ ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt endlich vieler offener Teilmengen von $E$ offen ist.
4. Auf $\mathbb{R}$ betrachten wir die durch
$$\varrho(x, y) := |\exp(-x) - \exp(-y)|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$
definierte Metrik $\varrho$. Zeigen Sie, dass $(\mathbb{R}, \varrho)$ nicht vollständig ist. Geben Sie zu diesem Zweck eine Cauchy-Folge in $(\mathbb{R}, \varrho)$, die nicht konvergent ist.

**Hausaufgaben**

6.1 Es sei $E$ eine nichtleere Menge. Zeigen Sie: $d : E \times E \to \mathbb{R}$ ist genau dann eine Metrik auf $E$, wenn für beliebige $x, y, z \in E$ gilt: (2 Punkte)
   (a) $d(x, y) = 0 \iff x = y$,
   (b) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(y, z)$.

6.2 Beweisen Sie Korollar B6.12 aus der Vorlesung: Ein metrischer Raum ist genau dann folgenkompakt, wenn er vollständig und totalbeschränkt ist. (8 Punkte)

6.3 Sei $(E, d)$ ein metrischer Raum und $M \subseteq E$ nicht leer. Beweisen oder widerlegen Sie: (4 Punkte)
   (a) Ein Punkt $x \in E$ ist ein Randpunkt von $M$ genau dann, wenn $x$ ein Berührungspunkt von $M$ aber kein innerer Punkt von $M$ ist.
   (b) Es können Randpunkte von $M$ existieren, die keine Häufungspunkte von $M$ sind.