WS 2008/09
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

7. Übungsblatt Analysis II

Abgabe: 02.12.2008

Übungsaufgaben

1. Sei $\mathbb{R}$ mit der Standardmetrik $d(x,y) := |x-y|$ versehen. Untersuchen Sie die Mengen M und B auf Kompaktheit (mittels der Definition):

   (a) $M := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\} \cup \{0\}$,

   (b) $B := \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^+\right\}$.

2. Sei $\mathbb{R}^n$ versehen mit der durch $\|\cdot\|_\infty$ induzierten Metrik. Gibt es ein $R \geq 0$ mit $\|a_k\|_\infty \leq R$ für alle $k \in \mathbb{N}$, so besitzt (a_k) eine konvergente Teilfolge.

3. Beweisen Sie: Eine Teilmenge M von $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ ist genau dann kompakt, wenn sie beschränkt und abgeschlossen ist.

Tutoriumsaufgaben

1. Sei (E,d) ein metrischer Raum. Für die Folge (z_n) gelte:

   $$\text{es gibt ein } q \in (0,1), \text{ so dass für alle } n \in \mathbb{N} \text{ gilt: } d(z_{n+2}, z_{n+1}) \leq q \cdot d(z_{n+1}, z_n).$$

   Ist (z_n) eine Cauchyfolge?

2. Im Hilbertschen Folgenraum ℓ^2 der quadratisch summierbaren Zahlenfolgen $x = (a_n)$ ist durch $\|x\|_2 := \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2}$ eine Norm gegeben. Untersuchen Sie die Einheitskugel $B := \{x \in \ell^2 : \|x\|_2 \leq 1\}$ auf Kompaktheit.

3. Beweisen Sie Lemma B6.31 aus der Vorlesung: Eine Folge in $\mathbb{E}^n$ konvergiert genau dann, wenn sie komponentenweise konvergiert.

Hausaufgaben

7.1 Zeigen Sie, dass jede Cauchyfolge in einem metrischen Raum beschränkt ist. (5 Punkte)

7.2 Der Vektorraum φ aller finiten Folgen $x = (a_n)$, d.h. $a_n = 0$ mit Ausnahme endlich vieler Indizes $n \in \mathbb{N}$, wird mit der Norm $\|x\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n|$ zu einem normierten Raum. Ist $(\varphi, \|\cdot\|_\infty)$ vollständig? (4 Punkte)

7.3 Es sei (E, d) ein metrischer Raum, $A \neq \varnothing$ eine kompakte und $B \neq \varnothing$ eine abgeschlossene Teilmenge von E mit $A \cap B = \varnothing$. Zeigen Sie, dass die Mengen A und B einen positiven Abstand voneinander haben, d.h. zeigen Sie, dass gilt: (6 Punkte)

$$\operatorname{dist}(A, B) := \inf_{x\in A, y\in B} d(x, y) > 0.$$