Mitschrift zur Analysis III Vorlesung von Prof. Dr. Wittbold im WS 08/09

Thomas El Khatib

28. März 2009

Vorab...

Die vorliegende Mitschrift entstand während und nach der Vorlesung Analysis III, gehalten von Prof. Dr. Petra Wittbold im Wintersemester 2008/2009. Teile davon sind auch aus der großen Übung und den Hausaufgaben der Übungsleiterin Martha Hubski sowie einigen Tutorien von Nicole Lubrich entnommen, und ein sehr kleiner Teil wurde von mir selbst ergänzt - solche Anmerkungen sind im Skript *kursiv* notiert. Die in der Vorlesung vorgenommene Nummerierung der Definitionen und Sätze wurde dabei größtenteils beibehalten.

Obwohl ich versucht habe, alles korrekt und verständlich wiederzugeben, haben sich gewiss kleine und größere Fehler eingeschlichen. Weder ich noch Prof. Dr. Wittbold übernehmen Garantie für die Korrektheit und Vollständigkeit der Mitschrift. Dennoch bin ich für alle Anmerkungen, Verbesserungsvorschläge und vor allem veranschaulichende Grafiken sehr dankbar.

Thomas El Khatib
E-Mail: `themathchannel@gmail.com`

Inhaltsverzeichnis

8 Differentialgleichungen 7

8.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen . . . 7

8.1.4 Erinnerung: Satz von Picard-Lindelöf, lokale Version . . . 7

8.1.5 Bemerkungen . . . 7

8.1.6 Satz von Picard-Lindelöf, globale Version . . . 9

8.1.7 Picard-Lindelöf'sches Iterationsverfahren . . . 11

8.1.8 Beispiel . . . 12

8.1.9 Satz von Peano . . . 12

8.1.10 Fixpunktsatz von Schauder . . . 13

8.1.11 Satz von Arzelà -Ascoli . . . 13

8.1.12 Beweis des Satzes von Peano . . . 15

9 Wegintegrale 17

9.1 Rektifizierbarkeit, von Wegen, Weglänge, Bogenlänge . . . 17

9.1.1 Erste Überlegungen . . . 17

9.1.2 Definition . . . 17

9.1.3 Funktionen beschränkter Variation . . . 17

9.1.4 Beispiele und Gegenbeispiele für Rektifizierbarkeit . . . 21

9.1.5 Dekomposition von Wegen und Weglängenfunktion . . . 23

9.1.6 Berechnung von Weglängen . . . 23

9.1.7 Jordanbögen und -kurven . . . 25

9.1.8 Bogenlänge . . . 26

9.1.9 Regularität . . . 26

9.2 Wegintegrale . . . 27

9.2.1 Motivation . . . 27

9.2.2 Idee . . . 27

9.2.3 Riemann-Stieltjes-Integral . . . 27

9.2.4 Integratoren von beschränkter Variation . . . 28

9.2.5 Spezialfall: stetig differenzierbarer Integrator . . . 29

9.2.6 Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals . . . 30

9.2.7 Wegintegral entlang eines Weges . . . 30

9.2.8 Eigenschaften . . . 31

9.2.9 Wegunabhängigkeit von Wegintegralen . . . 31

9.3 Wegunabhängigkeit, konservative Kraftfelder . . . 33

9.3.1 Wegzusammenhang . . . 33

9.3.2 Gebiete, einfacher Zusammenhang, Deformieren . . . 33

9.3.3 Wegunabhängigkeit . . . 34

9.3.4 Stammfunktion . . . 34

9.3.5 Beispiel . . . 34

9.3.6 Konservative Vektorfelder sind genau die Gradientenfelder 35

9.3.7 Integrabilität in einfach zusammenhängenden Gebieten . 37

9.3.8 Wegintegrale skalarwertiger Funktionen . . . 38

10 Riemann-Integration im Mehrdimensionalen 40

10.1 Grundlegendes . . . 40

10.1.1 Bezeichnungen . . . 40

10.1.2 Verfeinerungen von Zerlegungen . . . 40

10.1.3 Riemann-Integral . . . 41

10.1.4 Sätze zum Riemann-Integral 42
10.1.5 Riemann'sche Zwischensummen, Riemann-Folgen 42
10.1.6 Beispiel zur expliziten Bestimmung des Integrals 43
10.1.7 Nullmengen 44
10.1.8 Lebesgue'sches Integrabilitätskriterium 45
10.2 Satz von Fubini, iterierte Integrale 47
10.2.1 Motivation 47
10.2.2 Satz von Fubini 47
10.3 Integration über Jordan-messbare Teilmengen 49
10.3.1 Integration über mehr Mengen 49
10.3.2 Jordan-Messbarkeit und Nullmengen 49
10.3.3 Äußerer und innerer Inhalt 50
10.3.4 Nullmengen und Jordan-messbare Mengen mit Inhalt 0 . 50
10.3.5 Mittelwertsatz für Bereichsintegrale 51
10.3.6 Mengenoperationen auf dem Integrationsbereich 51
10.3.7 Vernachlässigbarkeit von Jordan-Nullmengen 53
10.3.8 Beispiele für Jordan-Nullmengen 53
10.3.9 Inhalte von Ordinatenmengen 53
10.3.10 Satz von Cavalieri 54
10.4 Integration über Normalbereiche 55
10.4.1 Definition 55
10.4.2 Integration 55
10.4.3 Situation im Dreidimensionalen 56
10.5 Substitutionsregel für Bereichsintegrale 56
10.5.1 Motivation 56
10.5.2 Vorbereitungen 56
10.5.3 Formulierung der Substitutionsregel 57
10.5.4 Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten 57
10.5.5 Beweis der Substitutionsregel 58
10.6 Integralsätze: Satz von Gauß-Green 62
10.6.1 Motivation 62
10.6.2 Bezeichnungen 63
10.6.3 Formulierung des Satzes mit partiellen Ableitungen 63
10.6.4 Gültige Integrationsbereiche 65
10.6.5 Formulierung des Satzes mit äußerem Normalenvektor . . 65
10.6.6 Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen 66
10.7 Flächen und Oberflächenintegrale im $\mathbb{R}^3$ 66
10.7.1 Beispiele 67
10.7.2 Motivation der Flächeninhaltsberechnung 67
10.7.3 Inhalt von Flächen 69
10.7.4 Beispiel 69
10.7.5 Inhalt von Flächenstücken 69
10.7.6 In alternativer Schreibweise 71
10.7.7 Motivation des Oberflächenintegrals skalarer Funktionen . 71
10.7.8 Definition des Oberflächenintegrals für skalare Funktionen 72
10.7.9 Motivation des Oberflächenintegrals für Vektorfelder . . . 72
10.7.10 Definition des Oberflächenintegrals für Vektorfeld 73
10.8 Satz von Stokes 74
10.8.1 Formulierung 74
10.8.2 Alternative Schreibweise und physikalische Interpretation 74

10.8.3 Beweis des Satzes . . . 75
10.9 Gauß'scher Satz im Raum . . . 76
10.9.1 C^1-Normalbereiche . . . 76
10.9.2 Beispiele . . . 77
10.9.3 Formulierung des Satzes . . . 77
10.9.4 Green'sche Formeln . . . 79

11 Maß- und Integrationstheorie **81**
11.0 Motivation des Kapitels . . . 81
11.0.1 Nachteile des Riemann'schen Integralbegriffs . . . 81
11.0.2 Idee des Lebesgue-Integrals . . . 82
11.0.3 Auftretende Probleme . . . 82
11.1 σ-Algebren . . . 82
11.1.1 Mengenringe, -algebren und σAlgebren . . . 83
11.1.2 Beispiele . . . 83
11.1.3 Linkshalboffene Quader . . . 83
11.1.4 Durchschnitte in Ringen und σ-Algebren . . . 85
11.1.5 Erzeuger von σ-Algebren . . . 85
11.1.6 Erzeuger der Borel'schen Mengen . . . 86
11.1.7 Borel-σ-Algebren . . . 87
11.1.8 σ-Algebren und Abbildungen . . . 88
11.1.9 Spur-σ-Algebren . . . 89
11.1.10 Messbarer Raum . . . 89
11.2 Inhalte und Maße . . . 89
11.2.1 Definition . . . 89
11.2.2 Beispiele . . . 90
11.2.3 Eigenschaften von Inhalten . . . 92
11.2.4 Kriterien für σ-Additivität . . . 93
11.2.5 Der Jordan-Inhalt ist σ-additiv . . . 95
11.3 Konstruktion von Maßen und insbesondere des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^N$ . . . 96
11.3.1 Konstruktion in drei Schritten . . . 96
11.3.2 Äußere Maße . . . 96
11.3.3 μ^*-Messbarkeit . . . 97
11.3.4 Fortsetzungssatz von Carathéodory . . . 99
11.3.5 σ-Endlichkeit . . . 100
11.3.6 Eindeutigkeit der Fortsetzung . . . 100
11.3.7 Borel- und Lebesgue-Maß . . . 101
11.3.8 Vollständigkeit . . . 102
11.3.9 Eigenschaften des Lebesgue-Maßes . . . 105
11.4 Messbare Funktionen . . . 107
11.4.1 Motivation . . . 107
11.4.2 Definition . . . 108
11.4.3 Elementare Eigenschaften . . . 109
11.4.4 Beispiele für messbare Funktionen . . . 110
11.4.5 Zusammensetzungen von messbaren Funktionen . . . 110
11.4.6 Messbarkeit unter Supremums- und Limesbildung . . . 110
11.4.7 Einfache Funktionen . . . 111
11.4.8 Approximation nicht-negativer messbarer Funktionen . . . 112
11.4.9 Rolle von Nullmengen . . . 113

11.4.10 Speziell: Vollständige Maßräume 113
11.4.11 Satz von Egorov 114
11.4.12 Konvergenz dem Maße nach 116
11.5 Lebesgue-Integration 117
11.5.1 Schritt 1: Integral für positive einfache Funktionen 117
11.5.2 Schritt 2: Integral für positive messbare Funktionen . . . 119
11.5.3 Satz von der monotonen Konvergenz 120
11.5.4 Lemma von Fatou 122
11.5.5 Schritt 3: Integral für Funktionen mit beliebigen Werten . 123
11.5.6 Eigenschaften des Integrals 124
11.5.7 Satz von der majorisierten Konvergenz 125
11.5.8 Parameterintegrale 126
11.5.9 Riemann-Integral und Lebesgue-Integral 128
11.5.10 Uneigentliche Riemann-Integrale und das Lebesgue-Integral 130
11.5.11 Integrationstheorie im Komplexen 131
11.6 Lebesgue-Räume 132
11.6.1 Definition der $\mathcal{L}^p$-Räume 132
11.6.2 $\mathcal{L}^p$-Halbnormen 132
11.6.3 Die Halbnorm ist im Allgemeinen keine Norm 134
11.6.4 Faktorräume 135
11.6.5 Definition der L^p-Räume 135
11.6.6 Die Lebesgue-Räume sind vollständig 136
11.6.7 Der L^∞-Raum 137
11.6.8 Beziehungen zwischen den L^p-Räumen 140

8 Differentialgleichungen

8.1 Gewöhnliche Differentialgleichungen

8.1.4 Erinnerung: Satz von Picard-Lindelöf, lokale Version

Satz 8.1.2 (Satz von Picard-Lindelöf, lokale Version)**.** Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum; seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $r > 0$, $u_0 \in X$, $g : [a,b] \times \overline{B_r(x_0)} \to X$ stetig und Lipschitz-stetig bezüglich y, d. h. es existiert ein $L > 0$, sodass

$$\|g(t,y) - g(t,z)\|_X \leq L \|y - z\|_X \quad \forall\, y, z \in \overline{B_r(x_0)}, t \in [a,b]$$

Dann besitzt das Anfangswertproblem

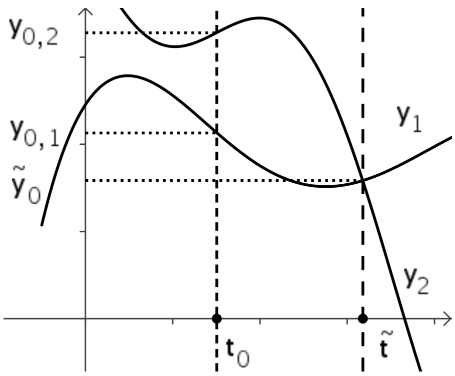
$$\begin{cases} y' = g(t,y) \\ y(t_0) = u_0 \end{cases}$$

für beliebiges $t_0 \in [a,b]$ eine eindeutige Lösung auf einem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, wobei $\alpha > 0$.

Der Beweis findet sich in der Mitschrift zu Analysis II.

8.1.5 Bemerkungen

1. Aus der lokalen Eindeutigkeit von Lösungen des (AWP) folgt, dass sich die Lösungskurven verschiedener Lösungen des (AWP) „nicht schneiden“.



   Angenommen doch, dann wären y_1, y_2 verschiedene Lösungen des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = y(t,y) \\ y(\tilde{t}) = \tilde{y}_0 \end{cases}$$

2. Die lokale Version des Satzes von Picard-Lindelöf garantiert nur die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des (AWP) auf einem möglicherweise sehr kleinen Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$, insbesondere nicht aber auf ganz $[a,b]$. Betrachte zum Beispiel

$$\begin{cases} y' = y^2 (= g(t,y)) \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

so ist $g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und lokal Lipschitz-stetig bezüglich y. Demnach ist Satz 8.1.2 anwendbar, der eine eindeutige Lösung y des (AWP) auf einem Intervall $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ garantiert.

Man bemerkt, dass die konstante Nullfunktion auch eine Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} y' = y^2 (= g(t,y)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

ist, und da sich die Lösungskurven nach Bemerkung 1 nicht schneiden, muss $y(t) > 0$ für alle $t \in [-\alpha, \alpha]$ gelten. In der Differentialgleichung darf also durch $y(t)^2$ dividiert werden:

$$\frac{1}{y(t)^2} y'(t) = 1 \quad \forall\, t \in [-\alpha, \alpha]\,,$$

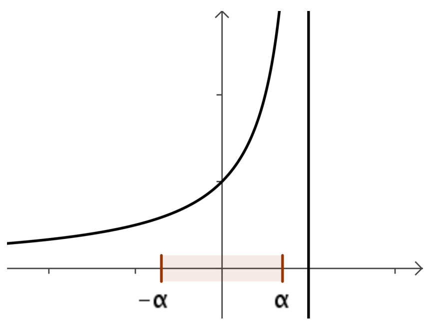
woraus man per Kettenregel erhält:

$$\left(-\frac{1}{y(t)}\right)' = 1 \quad \overset{\int}{\Rightarrow} \quad -\frac{1}{y(t)} = t + \text{const} \quad \forall\, t \in [-\alpha, \alpha]$$

Aus der Anfangsbedingung $y(0) = 1$ folgt $-1 = 0 + \text{const}$, also $\text{const} = -1$, d. h.

$$y(t) = \frac{1}{1-t} \quad \forall\, t \in [-\alpha, \alpha]$$

ist lokale Lösung des (AWP)s. Folglich muss aber $[-\alpha, \alpha] \subset \,]-\infty, 1[$ sein und die Lösung „explodiert“ für $t \nearrow 1$, sie kann nicht über $]\infty, 1[$ hinaus fortgesetzt werden.



3. Die oben angewendete Methode zur Berechnung einer expliziten Lösung ist die sogenannte **Methode der Trennung der Variablen**, die allgemeiner auf Differentialgleichungen vom Typ $y' = g(t)h(y)$ mit stetigem g und lokal Lipschitz-stetigen h (bei eventuell gegebener Anfangsbedingung $y(t_0) = y_0$) anwendbar ist:

   (a) Alle Nullstellen y_s von h sind konstante Lösungen $y(t) = y_s$ der Differentialgleichung, sogenannte **stationäre Lösungen**.

   (b) Aus der lokalen Eindeutigkeit von Lösungen des (AWP)s folgt: jede nicht-stationäre Lösung y der Differentialgleichung erfüllt $h(y(t)) \neq 0$

für alle t im Existenzintervall I. Die Berechnung einer solchen nicht-stationären Lösung erfolgt wie im Beispiel oben:

$$\begin{aligned} y'(t) &= g(t)h(y(t)) \quad \forall\, t \in I \\ \frac{y'(t)}{h(y(t))} &= g(t) && \Rightarrow \\ (\psi(y(t)))' &= g(t), \end{aligned}$$

wobei $\psi = \int \frac{1}{h}$. Per Integration folgt

$$\psi(y(t)) = \int g(t)\,\mathrm{d}t + \text{const},$$

wobei const im Falle einer gegebenen Anfangsbedingung über diese bestimmt ist. Als Lösung hat man dann

$$y(t) = \psi^{-1}\left(\int g(t)\,\mathrm{d}t + \text{const}\right)$$

Formal schreibt man

$$\begin{aligned} y' = g(t)h(y) \quad &\Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = g(t)h(y) \quad \stackrel{\text{Trennung}}{\Rightarrow} \\ \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = g(t)\,\mathrm{d}t \quad &\stackrel{\int}{\Rightarrow} \quad \int \frac{1}{h(y)}\,\mathrm{d}y = \int g(t)\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

und löst dann nach y auf. Im Falle eines gegebenen Anfangswertes $y(t_0) = y_0$ lautet der letzte Schritt

$$\ldots \stackrel{\int}{\Rightarrow} \int\limits_{y_0}^{y(t)} \frac{1}{h(v)}\,\mathrm{d}v = \int\limits_{t_0}^{t} g(s)\,\mathrm{d}s$$

8.1.6 Satz von Picard-Lindelöf, globale Version

Satz 8.1.3 (Satz von Picard-Lindelöf, globale Version)**.** Seien $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum, $a, b \in \mathbb{R}$, $g : [a,b] \times X \to X$ eine stetige und bezüglich der 2. Variablen (global) Lipschitz-stetige Funktion, d. h.

$$\exists\, L > 0 \,:\, \|g(t,x) - g(t,y)\|_X \leq L \cdot \|x - y\|_X \quad \forall\, x, y \in X,\, t \in [a,b]$$

Dann gilt: Für alle $t_0 \in [a,b]$, $y_0 \in X$ besitzt das (AWP)

$$\begin{cases} y' = g(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

eine eindeutige globale - d. h. auf ganz $[a,b]$ definierte - Lösung.

Beweis. Wir gehen in vier Schritten vor.

1. y ist Lösung des (AWP)s auf $[a,b]$ genau dann, wenn $y \in C([a,b], X)$ und es gilt

$$y(t) = y_0 + \int\limits_{t_0}^{t} g(s, y(s))\,\mathrm{d}s \quad \forall\, t \in [a,b]$$

Damit reduziert sich das Problem auf die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes der Abbildung

$$\begin{aligned}\Phi:\ C([a,b]\,,X) &\to C([a,b]\,,X)\\ y &\mapsto y_0+\int_{t_0}^{\cdot} g(s,y(s))\,\mathrm{d}s\end{aligned}$$

Diese Abbildung ist wohldefiniert, da das Integral stets existiert und als Funktion der oberen Grenze stetig ist.

2. Statte dann $C([a,b]\,,X)$ mit der gewichteten Maximumsnorm

$$\|u\|_{\infty,w} := \max_{t\in[a,b]}\left(w(t)\cdot\|u(t)\|_X\right)$$

aus, wobei das Gewicht definiert ist als

$$w(t) := \mathrm{e}^{-L|t-t_0|}\quad \forall\, t\in[a,b]$$

Damit wird $(C([a,b]\,,X), \|\cdot\|_{\infty,w})$ ein Banachraum (*die Normaxiome rechnet man leicht nach, genauso wie die Äquivalenz der Norm zur Supremumsnorm: man beachte* $w(t)\geq 1$ *für alle* $t\in[a,b]$ *und den Umstand, dass* w *auf* $[a,b]$ *sein Minimum annimmt*).

3. Bezüglich dieser Norm ist Φ eine strikte Kontraktion:

$$\begin{aligned}\|\Phi(u)-\Phi(v)\|_{\infty,w} &= \left\| y_0+\int_{t_0}^{\cdot} g(s,u(s))\,\mathrm{d}s - y_0 - \int_{t_0}^{\cdot} g(s,v(s))\,\mathrm{d}s\right\|_{\infty,w}\\
&= \max_{t\in[a,b]} \mathrm{e}^{-L|t-t_0|}\cdot\left\|\int_{t_0}^{t}\left[g(s,u(s))-g(s,v(s))\right]\mathrm{d}s\right\|_X\\
&\leq \max_{t\in[a,b]} \mathrm{e}^{-L|t-t_0|}\cdot\left|\int_{t_0}^{t}\|g(s,u(s))-g(s,v(s))\|\,\mathrm{d}s\right|_X\\
&\leq \max_{t\in[a,b]} \mathrm{e}^{-L|t-t_0|}\cdot\left|\int_{t_0}^{t} L\mathrm{e}^{L|s-t_0|}\mathrm{e}^{-L|s-t_0|}\,\|u(s)-v(s)\|\,\mathrm{d}s\right|_X\\
&\leq \max_{t\in[a,b]} \mathrm{e}^{-L|t-t_0|}\cdot L\cdot\|u-v\|_{\infty,w}\left|\int_{t_0}^{t}\mathrm{e}^{L|s-t_0|}\,\mathrm{d}s\right|_X\\
&= \|u-v\|_{\infty,w}\cdot\max_{t\in[a,b]}\mathrm{e}^{-L|t-t_0|}\cdot L\cdot\frac{1}{L}\cdot\left(\mathrm{e}^{L|t-t_0|}-1\right)\\
&= \|u-v\|_{\infty,w}\max_{t\in[a,b]}\left(1-\mathrm{e}^{-L|t-t_0|}\right)\\
&= \underbrace{\left(1-\mathrm{e}^{-L\max(t_0-a,b-t_0)}\right)}_{<1}\|u-v\|_{\infty,w}\end{aligned}$$

4. Aus dem Banach'schen Fixpunktsatz folgt nun die Existenz und Eindeutigkeit eines Fixpunktes von Φ, also einer Lösung y des (AWP)s auf $[a, b]$.

$\square$

8.1.7 Picard-Lindelöf'sches Iterationsverfahren

Bemerkung. Der im Beweis verwendete Banach'sche Fixpunktsatz liefert auch eine Verfahren, wie iterativ eine Lösung für das gegebene Anfangswertproblem konstruiert werden kann: Wir definieren die Folge $(u_n)_n \subset C([a,b], X)$ rekursiv durch

$$u_0(t) := y(t_0), \quad u_{n+1}(t) := y_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, u_n(s))\,\mathrm{d}s \quad \forall\, t \in [a,b]$$

(mit den Bezeichnung wie im Satz und seinem Beweis). Nach dem Banach'schen Fixpunktsatz konvergiert $(u_n)_n$ gleichmäßig gegen die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems (die im Beweis verwendete Norm ist äquivalent zur Supremumsnorm).

Betrachte zum Beispiel das

$$\text{(AWP)} \begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

auf einem Intervall I mit $0 \in I$. Dann definieren wir also $(u_n)_n$ durch

$$u_0(t) := 1, \quad u_{n+1}(t) := 1 + \int_0^t u_n(s)\,\mathrm{d}s \quad \forall\, t \in I$$

So hat man zum Beispiel

$$\begin{aligned} u_1(t) &= 1 + \int_0^t 1\,\mathrm{d}s = 1 + t \\ u_2(t) &= 1 + \int_0^t 1 + t\,\mathrm{d}s = 1 + t + \frac{t^2}{2} \\ &\dots \end{aligned}$$

Induktiv zeigt man so

$$u_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \quad \forall\, t \in I,\, n \in \mathbb{N}$$

Also hat man mit $u(t) := \lim\limits_{n\to\infty} u_n(t) = \mathrm{e}^t$ eine eindeutige Lösung des (AWP).

8.1.8 Beispiel

$$\text{(AWP)} \begin{cases} y' = \sin(t^2 y) \; (= g(t,y)) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $(t,y) \mapsto \sin(t^2 y)$ ist stetig und für beliebige $a < b \in \mathbb{R}$ ist $g|_{[a,b]\times\mathbb{R}}$ global Lipschitz-stetig bezüglich y (da $\frac{\partial g}{\partial y}(t,y) = t^2\cos(t^2 y)$ auf $[a,b]\times\mathbb{R}$ durch $\max\left(a^2, b^2\right)$ beschränkt ist). Mit der globalen Version von Picard-Lindelöf folgt die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Anfangswertproblemen auf jedem Intervall $[a,b]$, also sogar die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung des (AWP)s auf ganz $\mathbb{R}$.

8.1.9 Satz von Peano

Wir hatten bereits gesehen, dass Anfangswertprobleme mit nur stetiger rechter Seite mehrere Lösungen besitzen können. Betrachte zum Beispiel

$$\text{(AWP)} \begin{cases} y' = \sqrt[3]{y} =: g(t,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

$g : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig aber in keiner Umgebung von 0 bezüglich y Lipschitz-stetig. Das (AWP) besitzt für $\alpha < 0 < \beta$ die unendlich vielen Lösungen

$$y_{\alpha,\beta}(t) = \begin{cases} \frac{1}{27}(t-\alpha)^3, & t \le \alpha \\ 0, & \alpha \le t \le \beta \\ \frac{1}{27}(t-\beta)^3, & \beta \le t \end{cases}$$

Die Existenz von Lösungen des (AWP) bei nur stetiger rechter Seite folgt für $X = \mathbb{R}^N$ aus

Satz 8.1.4 (Satz von Peano)**.** Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^N$ offen, $g : D \to \mathbb{R}^N$ stetig. Dann besitzt das Anfangswertproblem

$$\text{(AWP)} \begin{cases} y' = g(t,y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$$

für jedes Anfangswertepaar $(t_0, y_0) \in D$ mindestens eine lokale Lösung, d. h. es gibt ein $\alpha > 0$ und ein stetig differenzierbares $y : \,]t_0-\alpha, t_0+\alpha[\, \to \mathbb{R}^N$, das (AWP) auf $]t_0-\alpha, t_0+\alpha[$ löst.

Bemerkung. Der Satz von Peano gilt nicht für unendlich-dimensionale Banachräume an Stelle von $\mathbb{R}^N$!

$$X = c_0(\mathbb{N}) := \left\{ (x_n)_n \mid x_n \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}$$

ausgestattet mit der Norm $\|(x_n)_n\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$ ist ein unendlich-dimensionaler Banachraum. Betrachte nun das Anfangswertproblem in X

$$\text{(AWP)} \begin{cases} u' = g(u) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

mit

$$\begin{aligned} g :\ X &\to X \\ (x_n)_n &\mapsto 2\sqrt{|x_n|} \end{aligned}$$

und $u_0 = \left(\frac{1}{n^2}\right)_n$. Dann gilt: g ist stetig, aber in keiner Umgebung von u_0 Lipschitz-stetig. Angenommen nun, dieses AWP besitzt eine lokale Lösung $u :]-\alpha, \alpha[\to X$ für ein $\alpha > 0$, dann folgt aber für $n \in \mathbb{N}$

$$u_n(0) = \frac{1}{n^2},\ u_n'(t) = 2\sqrt{|x_n|}, \quad \forall\, t \in]-\alpha, \alpha[$$

Diese Anfangswertprobleme sind in $\mathbb{R}$ aber nach dem Satz von Picard-Lindelöf lokal eindeutig lösbar, da die rechte Seite $y \mapsto 2\sqrt{|y|}$ auf $]0, +\infty[$ lokal Lipschitz-stetig ist. Mit Hilfe der Methode der Trennung der Variablen ergibt sich

$$u_n(t) = \left(t + \frac{1}{n}\right)^2 \quad \forall\, t \in]-\alpha, \alpha[\,,\ n \in \mathbb{N}$$

aber dann ist

$$u(t) = (u_n(t))_n = \left(\left(t + \frac{1}{n}\right)^2\right)_n \notin X \quad \forall\, t \neq 0$$

Also besitzt (AWP) in $X = c_0(\mathbb{N})$ keine lokale Lösung.

8.1.10 Fixpunktsatz von Schauder

Vor dem Beweis des Satzes von Peano benötigen wir noch zwei Sätze. Da es sich auf Grund der Natur des Problems anbietet, die Behauptung wie im Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf auf ein Fixpunktproblem zurückzuführen, und wir in den Voraussetzungen des Satzes von Peano keine Lipschitz-Stetigkeit zur Verfügung haben, die wir geeignet für die Konstruktion einer kontraktiven Abbildung ausnutzen könnten, brauchen wir einen Ersatz für den Banach'schen Fixpunktsatz, nämlich den

Satz 8.1.5 (Fixpunktsatz von Schauder)**.** Sei E eine nicht leere, abgeschlossene und konvexe Teilmenge eines Banachraumes X und $\Phi :\ E \to E$ eine stetige Abbildung mit relativ-kompakten Bild $\Phi(E)$. Dann besitzt Φ mindestens einen Fixpunkt.

Beweis. wird in in den Vorlesungen Differentialgleichungen I und Nichtlineare Funktionalanalysis geführt. Nachzulesen auch in [5], in [1], in der Onlineversion des letzteren: [2] oder auch in diversen Funktionalanalysis Skripts, zum Beispiel [3]. □

8.1.11 Satz von Arzelâ -Ascoli

Der Fixpunktsatz von Schauder erfordert, dass die Abbildung ein relativ-kompaktes Bild hat. Zur Erinnerung: Eine Teilmenge M eines normierten Vektorraums X heißt relativ-kompakt in X genau dann, wenn $\overline{M}$ in X kompakt ist. Der folgende Satz charakterisiert diesen topologischen Begriff für die normierten Räume $(C([a,b]\,, \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ analytisch:

Satz 8.1.6 (Satz von Arzelà-Ascoli)**.** Seien $a, b \in \mathbb{R}, a < b$, $N \in \mathbb{N}$. Eine Teilmenge $M \neq \emptyset$ von $(C([a,b], \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$ ist relativ-kompakt genau dann, wenn gilt

1. M ist punktweise beschränkt, d. h.

$$\forall\, x \in [a,b] \quad \exists\, C \geq 0 \,:\, \|f(x)\| \leq C \quad \forall\, f \in M$$

2. M ist gleichgradig stetig, d. h.

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : |x-y| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon \quad \forall\, f \in M;\, x, y \in [a,b]$$

Bemerkung. Der Satz kann allgemeiner für Teilmengen $M \subseteq C_b(X,Y)$ gezeigt werden, wobei X ein kompakter metrischer Raum und Y ein Banachraum ist.

Beweis. Wir zeigen nur die Rückrichtung.

Sei $\emptyset \neq M \subseteq C([a,b], \mathbb{R}^N)$ punktweise beschränkt und gleichgradig stetig. Zu zeigen ist: M ist relativ-kompakt in $(C([a,b], \mathbb{R}^N), \|\cdot\|_\infty)$, d. h. jede Folge $(u_n)_n \subset M$ besitzt eine in $\mathbb{R}^N$ gleichmäßig konvergente Teilfolge.

Sei also $(u_n)_n \subset M$. Nach Voraussetzung ist $(u_n(x))_n \subset \mathbb{R}^N$ beschränkt für jedes $x \in [a,b]$, womit die Folge nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß eine konvergente Teilfolge besitzt.

$\mathbb{Q} \cap [a,b] = \{x_k \,:\, k \in \mathbb{N}\}$ ist abzählbar und dicht in $[a,b]$. Mit Hilfe des **Diagonalfolgenprinzips** können wir nun eine Teilfolge $(u_{n'})_{n'}$ von $(u_n)_n$ finden, sodass für alle $k \in \mathbb{N}$ der Grenzwert $\lim_{n' \to \infty} u_{n'}(x_k)$ in $\mathbb{R}^N$ existiert:

$x_1 : (u_n(x_1))_n$ besitzt eine in $\mathbb{R}^N$ konvergente Teilfolge, etwa $(u_{1,n}(x_1))_n$.
$x_2 : (u_{1,n}(x_2))_n$ besitzt eine in $\mathbb{R}^N$ konvergente Teilfolge, etwa $(u_{2,n}(x_2))_n$.
...

Schematisch aufgeschrieben hat man also die Folgen

$$\begin{matrix} u_{1,1} & u_{1,2} & u_{1,3} & \cdots \\ u_{2,1} & u_{2,2} & u_{2,3} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

Betrachtet man die Diagonalfolge $(u_{n,n})_n$, so gilt für alle $k \in \mathbb{N}$:

$$(u_{n,n}(x_k))_{n \geq k} \subseteq (u_{k,n}(x_k))$$

und somit existiert $\lim\limits_{n \to \infty} u_{n,n}(x_k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Ziel ist es nun, zu zeigen, dass die so gefundene Teilfolge $(u_{n'})_{n'}$ auf $[a,b]$ gleichmäßig konvergiert. Sei dazu $\epsilon > 0$; da $\mathbb{R}^N$ vollständig ist, genügt es nach Cauchy-Kriterium zu zeigen ist, dass es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$\|u_{n'}(x) - u_{m'}(x)\| < 3\epsilon \quad \forall\, x \in [a,b],\, n', m' \geq n_0$$

Nach Voraussetzung ist M gleichgradig stetig. Daher gibt es ein $\delta > 0$ mit

$$|x-y| < \delta \Rightarrow \|u_{n'}(x) - u_{n'}(y)\| < \epsilon \quad \forall\, x, y \in [a,b],\, n' \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Seien nun $I_1, \dots, I_l$ endlich viele offene Intervalle der Länge δ mit

$$[a, b] \subseteq \bigcup_{j=1}^{l} I_j$$

Da $\mathbb{Q} \cap [a, b]$ in $[a, b]$ dicht liegt, gibt es zu jedem I_j ein $x_j \in I_j \cap [a, b] \cap \mathbb{Q}$. Da weiterhin $(u_{n'}(x_j))_{n'}$ für jedes $j = 1, \dots, l$ in $\mathbb{R}^N$ konvergiert, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\|u_{n'}(x_j) - u_{m'}(x_j)\| < \epsilon \quad \forall\, n', m' \geq n_0 \quad \forall\, j = 1, \dots, l \quad (**)$$

Sei nun $x \in [a, b]$ beliebig. Dann existiert ein $j \in \{1, \dots, l\}$ mit $x \in I_j$, also insbesondere $\|x - x_j\| < \delta$. Dann folgt für alle $n', m' \geq n_0$

$$\|u_{n'}(x) - u_{m'}(x)\| \leq \underbrace{\|u_{n'}(x) - u_{n'}(x_j)\|}_{<\epsilon \text{ nach } (*)} + \underbrace{\|u_{n'}(x_j) - u_{m'}(x_j)\|}_{<\epsilon \text{ nach } (**)} + \underbrace{\|u_{m'}(x_j) - u_{m'}(x)\|}_{<\epsilon \text{ nach } (*)}$$

d. h. $\|u_{n'}(x) - u_{m'}(x)\| < 3\epsilon$. □

8.1.12 Beweis des Satzes von Peano

Nun endlich zum Beweis des Satzes von Peano:

Beweis. Nach Voraussetzung ist $D \neq \emptyset$ offen in $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Also existieren $a > 0, b > 0$ mit

$$R_{a,b} = [t_0 - a, t_0 + a] \times \overline{B_b(y_0)} \subseteq D$$

$R_{a,b}$ ist kompakt. Da g stetig ist, ist g auf $R_{a,b}$ beschränkt und gleichmäßig stetig. Sei

$$M := \max_{(t,y) \in R_{a,b}} \|g(t, y)\|$$

(wobei $\|\cdot\|$ beliebig ist, etwa die euklidische Norm in $\mathbb{R}^N$) und $\alpha := \min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$. Bemerke, dass y eine Lösung des (AWP)s auf $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ ist genau dann, wenn $y \in C(]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\,, \mathbb{R}^N)$ und

$$y(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} g(s, y(t))\, \mathrm{d}s \quad \forall\, t \in\,]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$$

Betrachte dann

$$E := \left\{u \in C([t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]\,, \mathbb{R}^N) \mid \|u(t) - y_0\| \leq b \quad \forall\, t \in\,]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\right\}$$

und

$$\begin{aligned} \Phi :\ & E \to E \\ & u \mapsto y_0 + \int_{t_0}^{\cdot} g(s, u(s))\, \mathrm{d}s \end{aligned}$$

Φ ist wohldefiniert, denn $\Phi(u) \in C(]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\,, \mathbb{R}^N)$ und es ist

$$\|\Phi(u)(t) - y_0\| = \left\| \int_{t_0}^{t} g(s, u(s))\, \mathrm{d}s \right\| \leq \left| \int_{t_0}^{t} \|g(s, u(s))\|\, \mathrm{d}s \right|$$

wobei $(s, u(s)) \in R_{a,b}$, also $\|g(s, u(s))\| \leq M$, und $|t - t_0| < \alpha$, woraus folgt

$$\|\Phi(u)(t) - y_0\| \leq \alpha \cdot M \leq b$$

Die Existenz einer lokalen Lösung auf $]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[$ des (AWP)s folgt, wenn es gelingt, einen Fixpunkt der Abbildung Φ zu finden. Es gilt

- Φ ist stetig (wobei wir die Supremumsnorm auf $C(]t_0 - \alpha, t_0 + \alpha[\,, \mathbb{R}^N)$ betrachten),
- aber im Allgemeinen ist Φ keine Kontraktion.
- $E \neq \emptyset$, E ist abgeschlossen, beschränkt und konvex.

Der Fixpunktsatz von Schauder liefert einen Fixpunkt von Φ, wir müssen nur noch nachweisen, dass $\Phi(E)$ relativ-kompakt ist, um den Satz anwenden zu können. Nach dem Satz von Arzelà-Ascoli genügt es wiederum zu zeigen:

- $\Phi(E)$ ist punktweise beschränkt: Das ist klar, denn es ist $\Phi(E) \subseteq E$ und E ist beschränkt, wodurch $\Phi(E)$ sogar gleichmäßig beschränkt ist.
- $\Phi(E)$ ist gleichgradig stetig: Für alle $u \in E$, $s, t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ gilt

$$\begin{aligned}
\|\Phi(u)(t) - \Phi(u)(s)\| &= \left\| y_0 + \int_{t_0}^{t} g(u, u(\sigma))\,\mathrm{d}\sigma - y_0 - \int_{t_0}^{s} g(u, u(\sigma))\,\mathrm{d}\sigma \right\| \\
&= \left\| \int_{s}^{t} g(u, u(\sigma))\,\mathrm{d}\sigma \right\| \\
&\leq \left| \int_{s}^{t} \underbrace{\|g\underbrace{(u, u(\sigma))}_{\in R_{a,b}}\|}_{\leq M}\,\mathrm{d}\sigma \right| \leq M\,|t - s|
\end{aligned}$$

□

9 Wegintegrale

9.1 Rektifizierbarkeit, von Wegen, Weglänge, Bogenlänge

9.1.1 Erste Überlegungen

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ ein Weg, d. h. eine stetige Abbildung. Wie kann man die Länge dieses Weges definieren und beschreiben? Intuitiv geht man ähnlich vor, wie bei der Definition des Riemann-Integrals. Der Weg selbst sollte durch Streckenzüge angenähert werden können, deren Länge durch Abstandsmessung der Zwischenpunkte einfach bestimmen kann. Je mehr Zwischenpunkte eingefügt werden, desto genauer sollte die Approximation sein.

Definition. Ist also eine Zerlegung $Z = \{a = t_0, \ldots, t_k = b\}$ des Parameterintervalls $[a, b]$ gegeben, so definieren wir die Länge des eingeschriebenen Streckenzugs als

$$L(\gamma, Z) = \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\|$$

Wenn Z' eine feinere Zerlegung ist, etwa $Z' = \{t_0, \xi, t_1, \ldots, t_k\}$, dann folgt mit Hilfe der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned} L(\gamma, Z') &= \|\gamma(\xi) - \gamma(t_0)\| + \|\gamma(t_1) - \gamma(\xi)\| + \sum_{i=2}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| \\ &\geq \sum_{i=1}^{k} \|\gamma(t_i) - \gamma(t_{i-1})\| = L(\gamma, Z) \end{aligned}$$

9.1.2 Definition

Definition 9.1.1. Ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ heißt **rektifizierbar**, wenn ein $M > 0$ existiert, sodass $L(\gamma, Z) \leq M$ für alle Zerlegungen Z von $[a, b]$ gilt. In diesem Fall definiert man

$$L(\gamma) := \sup_{Z \text{ Zerlegung von } [a,b]} L(\gamma, Z)$$

9.1.3 Funktionen beschränkter Variation

Definition. Sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein normierter Raum. Eine Funktion $g : [a, b] \to X$ ist **von beschränkter Variation**, wenn ein $M > 0$ existiert, sodass gilt

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} \|g(t_i) - g(t_{i-1})\|_X}_{:=V(g,Z)} \leq M \quad \forall\, Z = \{a = t_0, \ldots, t_k = b\} \text{ Zerlegung von } [a, b]$$

In diesem Fall definiert man die **Totalvariation** von g auf $[a, b]$ als

$$V(\gamma, [a, b]) := V_a^b(\gamma) := \sup_{Z \text{ Zerlegung von } [a,b]} V(\gamma, Z)$$

Die Menge der Funktionen mit beschränkter Variation bildet den Unterraum $BV([a, b], X)$ der beschränkten Funktionen $B([a, b], X)$. Ist $X = \mathbb{R}$, so schreibt man kurz $BV([a, b])$.

Mit anderen Worten: Ein Weg $\gamma :\ [a,b] \to \mathbb{R}^N$ ist rektifizierbar, wenn die Funktion γ von beschränkter Variation ist. Die Länge des Weges ist in diesem Fall genau die Totalvariation von γ.

Im folgenden Satz werden die wichtigsten Eigenschaften von Funktionen mit beschränkter Variation aufgezeigt.

Satz. Sei $[a,b]$ ein Intervall, $(X, \|\cdot\|)$ ein normierter Raum und $f :\ [a,b] \to X$. Es gilt

1. f ist genau dann konstant, wenn $f \in BV([a,b], X)$ und $V_a^b(f) = 0$.
2. Ist $f \in BV([a,b], X)$, so ist f beschränkt und $\|f(b) - f(a)\| \leq V_a^b(f)$.
3. Ist $X = \mathbb{R}$ und f monoton, so gilt $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$.
4. Ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante L, so gilt $V_a^b(f) \leq L(b-a)$.
5. Ist $f \in BV([a,b], X)$, so gilt $f \in BV([c,d], X)$ für jedes Teilintervall $[c,d] \subseteq [a,b]$.
6. Sei $a < c < b$, dann ist $f \in BV([a,b], X)$ genau dann, wenn $f \in BV([a,c], X)$ und $f \in BV([c,b], X)$. In diesem Fall gilt $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.
7. Ist $f \in BV([a,b], X)$ stetig in x_0, so ist auch die Funktion $V :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch
$$V(x) := \begin{cases} 0, & x = a, \\ V_a^x(f), & x \in \left]a,b\right] \end{cases}$$
stetig in x_0.
8. (**Jordan'scher Darstellungssatz**)

   Sei $X = \mathbb{R}$. Es ist $f \in BV([a,b])$ genau dann, wenn monoton wachsende Funktionen $f_1, f_2 :\ [a,b] \to \mathbb{R}$ existieren mit $f = f_1 - f_2$. Ist f stetig, so können auch f_1 und f_2 stetig gewählt werden.
9. Ist f stetig und $F :\ [a,b] \to X$ gegeben durch $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, so ist $F \in BV([a,b], X)$ und es gilt $V_a^b(F) = \int_a^x \|f(t)\|\,\mathrm{d}t$.

Beweis ausgewählter Punkte.

6. „$\Rightarrow$“ folgt aus dem letzten Punkt. Für die andere Richtung sei wieder eine Zerlegung Z vorgelegt, die man gegebenenfalls um den Zwischenpunkt c erweitert (wodurch die Zerlegung nur feiner wird), sodass $Z = \{x_0, \ldots, x_m\}$ mit $x_j = c$ für ein $j \in \{0, \ldots, m\}$ gilt. Dann sind $Z_1 = \{x_0, \ldots, x_j\}, Z_2 = \{x_j, \ldots, x_m\}$ Zerlegungen von $[a,c]$ respektive $[c,b]$ und man hat
$$\begin{aligned} V(f,Z) &= \sum_{i=1}^{m} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \\ &= \sum_{i=1}^{j} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| + \sum_{i=j+1}^{m} \|f(t_i) - f(t_{i-1})\| \\ &= V(f,Z_1) + V(f,Z_2) \end{aligned}$$

Damit hat man zum einen $V(f,Z) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$, also $V_a^b(f) \leq V_a^c(f) + V_c^b(f)$. Andererseits besteht

$$V(f,Z_1) + V(f,Z_2) = V(f,Z) \leq V_a^b(f)$$

für beliebige vorgegebene Zerlegungen Z_1, Z_2 von $[a,c], [c,b]$ und entsprechend als $Z_1 \cup Z_2$ definiertes Z. Geht man nun jeweils zum Supremum über die Zerlegungen über, so erhält man

$$V_a^c(f) + V_c^b(f) \leq V_a^b(f),$$

also zusammen mit dem obigen Zusammenhang die gewünschte Gleichheit.

7. Wir bemerken zunächst, dass V monoton wachsend ist. Zeige die rechtsseitige Stetigkeit in $x_0 \in [a,b[$. Sei dazu ein $\epsilon > 0$ beliebig gegeben; wähle $Z = \{x_0, x_2, x_3, \ldots, x_m\}$ als Zerlegung von $[x_0, b]$ mit $V_{x_0}^b(f) - \frac{\epsilon}{2} \leq V(f,Z)$. Da f in x_0 rechtsseitig stetig ist, existiert ein $0 < \delta < x_2 - x_0$ mit

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(x_0)\| < \frac{\epsilon}{2} \quad \forall x \in [x_0, b]$$

Sei $x_1 \in B_\delta(x_0) \cap]x_0, b]$ beliebig, dann ist $x_0 < x_1 < x_2$, also ist $\tilde{Z} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ eine Verfeinerung von Z, woraus folgt

$$\begin{aligned} V_{x_0}^b(f) - \frac{\epsilon}{2} &\leq V(f,Z) \leq V(f,\tilde{Z}) \\ &= \|f(x_1) - f(x_0)\| + \sum_{k=2}^{m} \|f(x_k) - f(x_{k-1})\| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + V_{x_1}^b(f) \end{aligned}$$

also $V_{x_0}^b(f) - V_{x_1}^b(f) < \epsilon$. Nun ist aber

$$|V(x_1) - V(x_0)| = V(x_1) - V(x_0) = V_{x_0}^{x_1}(f) = V_{x_0}^b(f) - V_{x_1}^b(f) < \epsilon$$

Da $x_1 \in B_\delta(x_0) \cap]x_0, b]$ beliebig war, ist die rechtsseitige Stetigkeit von V in x_0 gezeigt. Analog zeigt man die linksseitige Stetigkeit.

8. Sei $f \in BV([a,b])$. V ist wie oben bemerkt eine monoton wachsende Funktion. Es verbleibt also zu zeigen, dass $T = V - f$ monoton wachsend ist. Betrachte dazu $x, y \in [a,b], x < y$, so gilt

$$T(y) - T(x) = (V(y) - V(x)) - (f(y) - f(x)) = V_x^y(f) - (f(y) - f(x))$$

Nach Punkt 5 ist $f \in BV([x,y])$, nach Punkt 2 ist $|f(y) - f(x)| \leq V_x^y(f)$, also gewiss

$$T(y) - T(x) = V_x^y(f) - (f(y) - f(x)) \geq 0 \Leftrightarrow T(x) \leq T(y)$$

Ist f stetig, so ist nach dem letzten Punkt V stetig, also $T = V - f$ ebenfalls.

Sei nun $f = f_1 - f_2$ mit f_1, f_2 monoton wachsenden Funktionen auf $[a, b]$. Nach Punkt 3 sind also $f_1, f_2 \in BV([a, b])$. Es gilt für alle Zerlegungen Z

$$\begin{aligned}
V(f, Z) &= \sum_{k=1}^{m} \|f(x_i) - f(x_{i-1})\| \\
&= \sum_{k=1}^{m} \|(f_1(x_i) - f_1(x_{i-1})) - (f_2(x_i) - f_2(x_{i-1}))\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \|f_1(x_i) - f_1(x_{i-1})\| + \sum_{k=1}^{m} \|f_2(x_i) - f_2(x_{i-1})\| \\
&\leq V_a^b(f_1) + V_a^b(f_2)
\end{aligned}$$

9. Da f auf einem kompakten Intervall stetig ist, ist f dort gleichmäßig stetig. Sei $\epsilon > 0$ vorgelegt, dann gibt es also ein $\delta > 0$, sodass

$$|x - y| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \frac{\epsilon}{b - a} \quad \forall\, x, y \in [a, b]$$

Für alle Zerlegungen $Z = \{x_0, \ldots, x_m\}$ mit $|Z| < \delta$ gilt also

$$\begin{aligned}
&|V(F, Z) - \sigma(Z, (x_k)_k, \|f\|)| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{m} \|F(x_k) - F(x_{k-1})\| - \sum_{k=1}^{m} \|f(x_k)\| \cdot (x_k - x_{k-1}) \right| \\
&= \left| \sum_{k=1}^{m} \|F(x_k) - F(x_{k-1})\| - \|f(x_k)\| \cdot (x_k - x_{k-1}) \right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \|F(x_k) - F(x_{k-1}) - f(x_k) \cdot (x_k - x_{k-1})\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \sup_{0 \leq t \leq 1} \|f(x_{k-1} + t \cdot (x_k - x_{k-1})) - f(x_k)\| \cdot (x_k - x_{k-1}) \\
&< \sum_{k=1}^{m} \frac{\epsilon}{b - a} \cdot (x_k - x_{k-1}) \\
&= \frac{\epsilon}{b - a} \sum_{k=1}^{m} (x_k - x_{k-1}) = \frac{\epsilon}{b - a}(b - a) = \epsilon
\end{aligned}$$

Da f integrierbar ist, muss

$$V_a^b(F) = \int_a^b \|f(t)\| \, \mathrm{d}t$$

gelten. Insbesondere ist $F \in BV([a, b])$.

$\square$

Außerdem reduziert sich die beschränkte Variation im Falle $X = \mathbb{R}^N$ auf die der Komponentenfunktionen:

Lemma 9.1.2. Sei $\gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_N) : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ ein Weg. Dann gilt:

$$\boxed{\gamma \text{ ist rektifizierbar} \iff \gamma_i \in BV([a,b]) \text{ für } i = 1, \ldots, N}$$

Beweis. Seien zunächst alle γ_i von beschränkter Variation, d. h. $V_a^b(\gamma_i) < \infty$ für alle $i = 1, \ldots, N$. Dann gilt für jede Zerlegung $Z = \{t_0, \ldots, t_m\}$ von $[a,b]$

$$\begin{aligned}
L(\gamma, Z) &= \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\|_2 \\
&= \sum_{k=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{N} |\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{m} \sum_{i=1}^{N} |\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})| \\
&= \sum_{i=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} |\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})| \leq \sum_{i=1}^{N} V_a^b(\gamma_i)
\end{aligned}$$

Der Übergang zum Supremum über alle Zerlegungen Z zeigt die Rektifizierbarkeit von γ.

Sei diese nun gegeben, d. h. für jede Zerlegung Z gilt

$$\infty > L(\gamma) \geq L(\gamma, Z) \geq \sum_{k=1}^{m} |\gamma_i(t_k) - \gamma_i(t_{k-1})| = V(\gamma_i, Z)$$

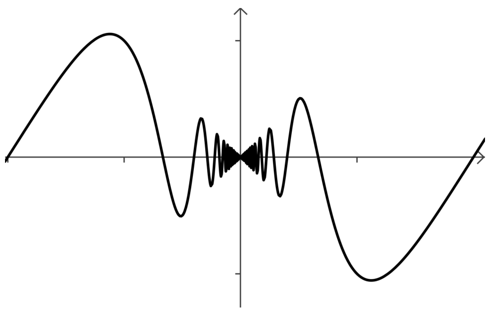
für alle $i = 1, \ldots, N$, also sind alle γ_i von beschränkter Variation. $\square$

9.1.4 Beispiele und Gegenbeispiele für Rektifizierbarkeit

Bemerkung. Nicht jeder Weg ist rektifizierbar, betrachte zum Beispiel

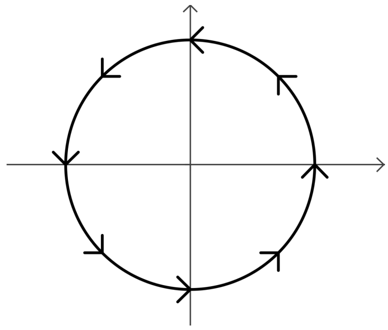
$$\begin{aligned}
\gamma :\ &[0,1] \to \mathbb{R}, \\
\gamma(x) &= \begin{cases} x \cos \frac{\pi}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

ist stetig, aber nicht von beschränkter Variation. Anschaulich oszilliert γ zu stark nahe 0



Als Beispiele für rektifizierbare Wege betrachte für festes $r > 0$

1.
$$\gamma_1 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \end{pmatrix}$$



γ_1 ist rektifizierbar, denn sei Z eine Zerlegung von $[0, 2\pi]$, dann gilt

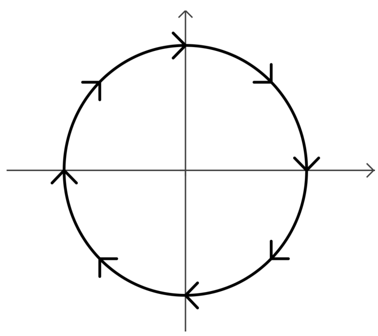
$$L(\gamma_1, Z) = \sum_{k=1}^{m} \|\gamma_1(t_k) - \gamma_1(t_{k-1})\|_2 = \sum_{k=1}^{m} \left\| \int_{t_k}^{t_{k-1}} \dot\gamma_1(t)\,\mathrm{d}t \right\|_2$$
$$\leq \sum_{k=1}^{m} \int_{t_k}^{t_{k-1}} \underbrace{\|\dot\gamma_1(t)\|_2}_{=r}\,\mathrm{d}t = \int_a^b r\,\mathrm{d}t = 2\pi r$$

2.
$$\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos 2t \\ r\sin 2t \end{pmatrix}$$

ist ebenfalls ein Weg; der Beweis der Rektifizierbarkeit verläuft analog. γ_2 durchläuft den Kreisbogen zweimal.

3.
$$\gamma_3 : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{pmatrix} r\cos t \\ -r\sin t \end{pmatrix}$$

ist ein weiterer rektifizierbarer Weg. Bis auf die Orientierung ist er derselbe wie γ_1.



$\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sind Wegdarstellungen des gleichen Bogens, wobei der **Bogen** Γ eines Weges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ als $\Gamma := \gamma([a, b])$ definiert ist.

Allgemein erhält man den zu einem Weg entsprechenden Weg mit umgekehrter Orientierung wie in folgender

Definition. Der zu einem Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ **inverse Weg** ist definiert als

$$\begin{aligned} \gamma^- : [a, b] &\to \mathbb{R}^N \\ \gamma^-(t) &= \gamma(a + b - t) \quad \forall\, t \in [a, b] \end{aligned}$$

9.1.5 Dekomposition von Wegen und Weglängenfunktion

Facts.

1. Ist c ein innerer Punkt von $[a, b]$ und $\gamma_1 := \gamma|_{[a,c]}, \gamma_2 := \gamma|_{[c,b]}$ (γ_1, γ_2 sind natürlich Wege), dann schreibt man $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$. Es gilt:

   γ ist genau dann rektifizierbar, wenn γ_1 und γ_2 rektifizierbar sind, und in diesem Fall gilt $L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$.

2. Ist $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ ein rektifizierbarer Weg, dann definert man

   $$\begin{aligned} s : [a, b] &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto \begin{cases} 0, & t = 0 \\ s(a, t) = L(\gamma|_{[a,x]}), & t > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   als die sogenannte **Weglängenfunktion**. Diese ist monoton wachsend und stetig (*man vergleiche die weiter oben definiert Variationsfunktion V*).

3. Wenn γ injektiv ist (man sagt dann: γ ist ein **Jordanweg** oder γ ist **doppelpunktfrei**), dann ist s streng monoton wachsend.

9.1.6 Berechnung von Weglängen

Lemma 9.1.3. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ ein stetig differenzierbarer Weg. Dann ist γ rektifizierbar. Die Weglängenfunktion ist ebenfalls stetig differenzierbar und es gilt

$$\dot{s}(t) = \|\dot{\gamma}(t)\|_2 \quad \forall\, t \in [a, b]\,, \text{ und } L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_2 \,\mathrm{d}t$$

In den Beispielen:

1. γ_1 ist stetig differenzierbar und es gilt

   $$L(\gamma_1) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}_1(t)\|_2 \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -r \sin t \\ r \cos t \end{pmatrix} \right\|_2 \mathrm{d}t = 2\pi r$$

   Analog sieht man $L(\gamma_3) = 2\pi r$ ein.

2. Für γ_2 rechnet man

   $$L(\gamma_2) = \int_0^{2\pi} \|\dot{\gamma}_2(t)\|_2 \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \left\| \begin{pmatrix} -2r \sin 2t \\ 2r \cos t \end{pmatrix} \right\|_2 \mathrm{d}t = 4\pi r$$

Beweis des Lemmas. Sei Z eine Zerlegung von $[a, b]$, dann gilt

$$\begin{aligned} L(\gamma, Z) &= \sum_{k=1}^{m} \|\gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1})\| \\ &= \sum_{k=1}^{m} \left\| \int\limits_{t_k}^{t_{k-1}} \dot\gamma(t)\,\mathrm{d}t \right\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \int\limits_{t_k}^{t_{k-1}} \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

γ ist also rektifizierbar und $L(\gamma) \leq \int_a^b \|\dot\gamma(t)\|\,\mathrm{d}t$.

Seien nun $t, t+h \in [a, b]\,, h > 0$, dann ist

$$\begin{aligned} \|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|_2 &\leq L(\gamma|_{[t,t+h]}) = s(t-h) - s(t) \\ &= L(\gamma|_{[t,t+h]}) \leq \int\limits_t^{t+h} \|\dot\gamma(s)\|_2 \,\mathrm{d}s \leq h \cdot \sup_{t\leq s\leq t+h} \|\dot\gamma(s)\| \end{aligned}$$

Das erste $\leq$ gilt, da die linke Seite die gröbste Abschätzung für die Länge der Kurve zwischen t und $t+h$ darstellt. Die zweite Ungleichheit wurde eben hergeleitet. Also hat man

$$\underbrace{\frac{\|\gamma(t+h) - \gamma(t)\|_2}{h}}_{\to\|\dot\gamma(t)\|} \leq \frac{s(t-h) - s(t)}{h} \leq \underbrace{\sup_{t\leq s\leq t+h} \|\dot\gamma(s)\|}_{\to\|\dot\gamma(t)\|,\ \text{da } \gamma\in C^1([a,b])}$$

Folglich ist s rechtsseitig differenzierbar auf $[a, b[$ mit der rechtsseitigen Ableitung $\|\dot\gamma(t)\|_2$ für alle $t \in [a, b[$. Die linksseitige Differenzierbarkeit folgt analog, also ist s stetig differenzierbar mit $\dot s(t) = \|\dot\gamma(t)\|_2$ auf $[a, b]$. Weiter gilt

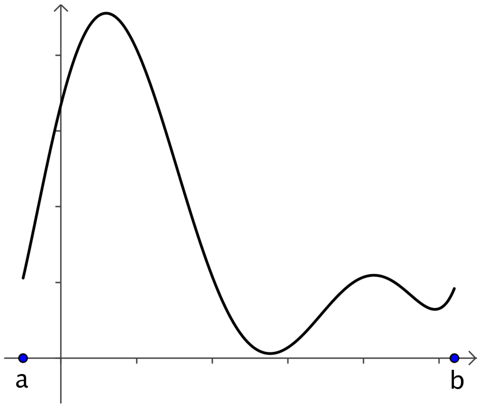
$$L(\gamma) = s(b) = s(b) - s(a) = \int\limits_a^b \dot s(t)\,\mathrm{d}t = \int\limits_a^b \|\dot\gamma(t\|\,\mathrm{d}t$$

□

Ein allgemeinerer Beweis wurde bereits weiter oben erbracht.

Als Beispiel und Spezialfall betrachten wir den Graph Γ_f einer stetig differenzierbaren Funktion $f:\ [a, b] \to \mathbb{R}$, d. h.

$$\begin{aligned} \gamma:\ [a, b] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (t, f(t)) \end{aligned}$$



Dann ergibt sich

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|_2 \,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(t))^2}\,\mathrm{d}t$$

Korollar 9.1.4. Jeder stückweise stetig differenzierbare Weg $\gamma = \gamma_1 \oplus \ldots \oplus \gamma_k$, also mit $\gamma_i \in C^1([a_i, b_i], \mathbb{R}^N)$, ist rektifizierbar und es gilt

$$L(\gamma) = \sum_{i=1}^{k} L(\gamma_i) = \sum_{i=1}^{k} \int_{a_i}^{b_i} \|\dot{\gamma}_i(t)\|_2 \,\mathrm{d}t$$

9.1.7 Jordanbögen und -kurven

Definition 9.1.5. Seien $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ ein Weg und $\Gamma = \gamma([a, b])$ der von γ erzeugte Bogen. Γ heißt **Jordanbogen**, wenn Γ Bogen eines Jordanweges $\tilde{\gamma}$ ist, und $\tilde{\gamma}$ heißt **Jordandarstellung** von Γ.

Γ heißt **Jordankurve** (oder **geschlossener Jordanbogen**), wenn Γ Bogen eines Weges $\tilde{\gamma} : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to \mathbb{R}^N$ derart ist, dass $\tilde{\gamma}|_{[\tilde{a},\tilde{b}[}$ injektiv ist und $\tilde{\gamma}(\tilde{a}) = \tilde{\gamma}(\tilde{b})$ gilt. Ein solches $\tilde{\gamma}$ heißt dann auch Jordandarstellung von Γ.

Der Kreisbogen mit Radius $r > 0$ ist eine Jordankurve und die Wege γ_1, γ_3 aus den Beispielen sind Jordandarstellungen dieser Kurve; γ_2 ist keine solche. Beachte: die beiden Jordandarstellungen γ_1, γ_3 haben die gleiche Weglänge.

Lemma 9.1.6. Seien $\gamma_i : [a_i, b_i] \to \mathbb{R}^N$ für $i = 1, 2$ Jordandarstellungen eines Jordanbogens Γ. Dann existiert ein stetiges, streng monotones und surjektives $\varphi : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$, sodass $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \varphi$ gilt.

Weiter gilt: Wenn $\psi : [a_3, b_3] \to [a_1, b_1]$ stetig, streng monoton und surjektiv ist, dann ist auch $\gamma_3 := \gamma_1 \circ \psi$ eine Jordandarstellung von Γ.

Beweis. Zum ersten Teil: $\varphi := \gamma_1^{-1} \circ \gamma_2$ hat die gewünschten Eigenschaften. $\square$

Satz 9.1.7. Seien $\gamma_i : [a_i, b_i] \to$ für $i = 1, 2$ Wege, $\omega : [a_2, b_2] \to [a_1, b_1]$ stetig, streng monoton und surjektiv, und sei $\gamma_2 = \gamma_1 \circ \omega$. Dann ist γ_1 rektifizierbar genau dann, wenn γ_2 rektifizierbar ist, und in diesem Fall gilt $L(\gamma_1) = L(\gamma_2)$.

Beweis. Sei γ_1 rektifizierbar und sei etwa ω streng monoton wachsend. Zeige die Rektifizierbarkeit von γ_2; wegen $\gamma_1 = \gamma_2 \circ \omega^{-1}$ folgt dann sofort die behauptete Äquivalenz.

Sei $Z = \{a_2 = t_0, \dots, t_m = b_2\}$ eine Zerlegung von $[a_2, b_2]$. Dann ist $\tilde{Z} := \{\omega(t_0), \dots, \omega(t_n)\}$ eine Zerlegung von $[a_1, b_1]$, und es ist

$$\begin{aligned} L(\gamma_2, Z) &= \sum_{k=1}^{m} \|\gamma_2(t_k) - \gamma_2(t_{k-1})\| \\ &= \sum_{k=1}^{m} \|\gamma_1(\omega(t_k)) - \gamma_1(\omega(t_{k-1}))\| \\ &= L(\gamma_1, Z) \leq L(\gamma_1) \end{aligned}$$

Es folgt

$$L(\gamma_2) = \sup_{Z \text{ Zerlegung}} L(\gamma_2, Z) \leq L(\gamma_1)$$

also ist γ_2 rektifizierbar und es ist $L(\gamma_2) \leq L(\gamma_1)$. Aus Symmetriegründen folgt Gleichheit. □

9.1.8 Bogenlänge

Dank der Ergebnisse von Lemma 9.1.6 und Satz 9.1.7 kann nun einem Jordanbogen eine Länge zugeordnet werden.

Definition 9.1.8. Ein Jordanbogen Γ (offen oder geschlossen) heißt rektifizierbar, wenn er eine rektifizierbare Jordandarstellung γ besitzt. In diesem Fall heißt $L(\Gamma) := L(\gamma)$ **Bogenlänge** von Γ.

Zum Beispiel hat der Kreisbogen mit Radius $r > 0$ um den Nullpunkt im $\mathbb{R}^2$ die Bogenlänge $L(\gamma_1) = L(\gamma_2) = 2\pi r$.

Facts. Wenn Γ ein rektifizierbarer Jordanbogen (offen oder geschlossen) ist, $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ eine zugehörige Jordandarstellung und $s : [a, b] \to [0, L(\gamma)]$ die zugehörige Weglängenfunktion, dann gilt:

s ist streng monoton wachsend, stetig und surjektiv, und somit ist $\tilde{\gamma} = \gamma \circ s^{-1}$ eine Jordandarstellung von Γ. Wenn γ sogar stetig differenzierbar ist und $\gamma'(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$, dann ist auch $\tilde{\gamma}$ stetig differenzierbar und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{\gamma}}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma) = \frac{\mathrm{d}\left(\gamma \circ s^{-1}\right)}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma) = \dot{\gamma}(s^{-1}(\sigma)) \cdot \frac{\mathrm{d}s^{-1}}{\mathrm{d}\sigma}(\sigma) = \frac{\dot{\gamma}(s^{-1}(\sigma))}{\dot{s}(s^{-1}(\sigma))} = \frac{\dot{\gamma}(s^{-1}(\sigma))}{\|\dot{\gamma}(s^{-1}(\sigma))\|}$$

Somit ist also $\left\| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\sigma} \tilde{\gamma}(\sigma) \right\| = 1$ für alle $\sigma \in [0, L(\gamma)]$. $\tilde{\gamma}$ heißt **Parameterdarstellung von γ über die Bogenlänge**.

9.1.9 Regularität

Definition 9.1.9. Ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ heißt **glatt** (oder **regulär**), wenn γ stetig diffferenzierbar ist und $\tilde{\gamma}(t) \neq 0$ für alle $t \in [a, b]$ gilt.

Ein Weg heißt **stückweise glatt**, wenn $\gamma = \gamma_1 \oplus \ldots \oplus \gamma_k$ und alle γ_i glatt sind.

Ein Bogen heißt **glatt** (respektive **stückweise glatt**), wenn er durch einen glatten (respektive stückweise glatten) Weg dargestellte werden kann.

9.2 Wegintegrale

9.2.1 Motivation

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ ein Weg, Γ der dazugehörige Bogen, $f : \Gamma \to \mathbb{R}^3$ ein stetiges „Vektorfeld“. Dies könnte die Bewegung eines Massenpunktes P entlang Γ unter Einwirkung des Kraftfeldes f modellieren. In der Mechanik stellt sich nun die Frage: Welche Arbeit wird dabei verrichtet?

9.2.2 Idee

Die Idee zur Lösung der Frage ist naheliegend: Ausgehend davon, dass sich die Arbeit auf einer Strecke dargestellt durch den Vektor $l \in \mathbb{R}^3$ bei konstanter Kraft F zu $W = \langle F, l \rangle$ ergibt, approximiert man den Weg durch Streckenzüge und wählt geeignete Zwischenpunkte auf den Teilstrecken, deren zugehöriger Kraftvektor als Näherung für die Kraft auf das ganze Segment verwendet wird. Konkret: Sind eine Zerlegung $Z = \{a = t_0, \ldots, t_m = b\}$ von $[a,b]$ und zugehörige Zwischenpunkte $\xi_k \in [t_{k-1}, t_k]$ vorgegeben, so sollte für die verrichtete Arbeit W gelten

$$W \approx \sum_{k=1}^{m} \langle f(\xi_k), \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \rangle =: \sigma_\gamma(Z, \xi, f)$$

Wenn nun die Feinheit $|Z|$ der Zerlegung gegen 0 strebt, dann sollte der Grenzwert $\lim\limits_{|Z| \to 0} \sigma_\gamma(Z, \xi, f)$ - falls existent - die vom Kraftfeld geleistete Arbeit sein und man könnte

$$\int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{|Z| \to 0} \sigma_\gamma(Z, \xi, f)$$

als das Wegintegral von f entlang γ definieren.

9.2.3 Riemann-Stieltjes-Integral

Zu untersuchen ist also das Konvergenzverhalten von

$$\begin{aligned}
\sigma_\gamma(Z, \xi, f) &= \sum_{k=1}^{m} \langle f(\gamma(\xi_k)), \gamma(t_k) - \gamma(t_{k-1}) \rangle \\
&= \sum_{k=1}^{m} \sum_{j=1}^{N} f_j(\gamma(\xi_k))\,(\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1})) \\
&= \sum_{j=1}^{N} \sum_{k=1}^{m} (f_j \circ \gamma)\,(\xi_k)\,(\gamma_j(t_k) - \gamma_j(t_{k-1}))
\end{aligned}$$

Bemerke, dass die $f_j \circ \gamma$ stetige reellwertige Funktionen auf $[a,b]$ und die γ_j stetige reellwertige Funktionen auf $[a,b]$ von beschränkter Variation sind. Für die Untersuchung erweitern wir das Riemann-Integral zum sogenannten Riemann-Stieltjes-Integral:

Definition. Sei $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $Z = \{t_0, \ldots, t_p\}$ Zerlegung von $[a,b]$ und $\xi_k \in [t_k, t_{k-1}]$ für $k = 1, \ldots, p$ Zwischenpunkte. Dann heißt

$$RS_\alpha(Z, \xi, g) = \sum_{k=1}^{p} g(\xi_k)\,(\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1}))$$

Riemann-Stieltjes-Summe (RS-Summe).

Eine Folge solcher RS-Summen $RS_\alpha(Z_n, \xi^n, g)$ mit $|Z_n| \to 0$ heißt **Riemann-Stieltjes-Folge**. Wenn dann jede RS-Folge gegen einen (und damit denselben) Grenzwert konvergiert, dann heißt g auf $[a,b]$ bezüglich α **Riemann-Stieltjes-integrierbar** und

$$\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}\alpha(x) := \int_a^b g\,\mathrm{d}\alpha := \lim_{|Z|\to 0} RS_\alpha(Z, \xi, g)$$

heißt dann **Riemann-Stieltjes-Integral** von g bezüglich α auf $[a,b]$. α *heißt auch* ***Integrator***.

9.2.4 Integratoren von beschränkter Variation

Satz 9.2.1. Wenn $g, \alpha : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und $\alpha \in BV([a,b])$, dann ist g bezüglich α RS-integrierbar auf $[a,b]$.

Beweis. Ganz analog wie beder Riemann-Integrierbarkeit reicht es zu zeigen, dass das folgende **Cauchy-Integrabilitätskriterium** erfüllt ist:

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \quad \forall Z, \tilde{Z} \text{ Zerlegung von } [a,b]\,,\ \xi, \tilde{\xi} \text{ Zwischenvektoren :}$$
$$\left| RS_\alpha(Z, \xi, g) - RS_\alpha(\tilde{Z}, \tilde{\xi}, g) \right| < \epsilon$$

Man überlegt sich leicht, dass es hierbei ausreicht, Zerlegungen $Z, \tilde{Z}$ zu betrachten, sodass $\tilde{Z}$ eine Verfeinerung von Z ist.

Sei also $\epsilon > 0$. Ist α konstant, so ist jede RS-Summe $RS_\alpha(Z, \xi, g) = 0$, womit nichts zu zeigen ist. Sei im Folgenden also α nicht konstant. Da $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, also sogar gleichmäßig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$|g(s) - g(t)| < \frac{\epsilon}{V_a^b(\alpha)}$$

wobei $V_a^b(\alpha) \neq 0$ die Totalvariation von α auf $[a,b]$ ist.

Seien nun $Z = \{t_0, \ldots, t_p\}\,, \tilde{Z} = \left\{\tilde{t}_0, \ldots, \tilde{t}_s\right\}$ Zerlegungen, $|Z|\,, |Z| < \delta$, $\tilde{Z}$ Verfeinerung von Z, $(\xi_k)_{k=1}^p\,, \left(\tilde{\xi}_k\right)_{k=1}^s$ zugehörige Zwischenpunkte. Wir sind also in der Situation, dass es zu jedem $k = 1, \ldots, p$ Indizes $l, m \in \{1, \ldots, s\}\,, l \le m$ gibt, mit

$$t_{k-1} = \tilde{t}_{l-1} < \tilde{t}_l < \ldots < \tilde{t}_{m-1} < \tilde{t}_m = t_k$$

Setzt man $\tilde{\eta}_i = \xi_k$ für alle $i = l, \ldots, m$, so gilt

$$\begin{aligned} g(\xi_k)\left(\alpha(t_k) - \alpha(t_{k-1})\right) &= \sum_{i=l}^m g(\xi_k)\left(\alpha(\tilde{t}_i) - \alpha(\tilde{t}_{i-1})\right) \\ &= \sum_{i=l}^m g(\tilde{\eta}_i)\left(\alpha(\tilde{t}_i) - \alpha(\tilde{t}_{i-1})\right) \end{aligned}$$

Dann kann man schreiben

$$\begin{aligned}
&\left|RS_\alpha(Z,\xi,g) - RS_\alpha(\tilde{Z},\tilde{\xi},g)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{p} g(\xi_k)\left(\alpha(t_k)-\alpha(t_{k-1})\right) - \sum_{k=1}^{s} g(\tilde{\xi}_k)\left(\alpha(\tilde{t}_k)-\alpha(\tilde{t}_{k-1})\right)\right| \\
&= \left|\sum_{k=1}^{s} \left(g(\tilde{\eta}_k) - g(\tilde{\xi}_k)\right)\left(\alpha(\tilde{t}_k)-\alpha(\tilde{t}_{k-1})\right)\right| \\
&\leq \sum_{k=1}^{s} \left|g(\tilde{\eta}_k) - g(\tilde{\xi}_k)\right| \left|\alpha(\tilde{t}_k)-\alpha(\tilde{t}_{k-1})\right|
\end{aligned}$$

Nun ist $\left|g(\tilde{\eta}_k) - g(\tilde{\xi}_k)\right| < \frac{\epsilon}{V_a^b}$, da $\left|\tilde{\eta}_k - \tilde{\xi}_k\right| \leq |t_k - t_{k-1}| < \delta$, also hat man

$$\left|RS_\alpha(Z,\xi,g) - RS_\alpha(\tilde{Z},\tilde{\xi},g)\right| < \frac{\epsilon}{V_a^b(\alpha)} \underbrace{\sum_{k=1}^{s} \left|\alpha(\tilde{t}_k)-\alpha(\tilde{t}_{k-1})\right|}_{\leq V_a^b(\alpha)} \leq \epsilon$$

□

9.2.5 Spezialfall: stetig differenzierbarer Integrator

Satz 9.2.2. Seien $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $\alpha : \ [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar (insbesondere also $\alpha \in BV([a,b])$). Dann gilt

$$\int_a^b g \,\mathrm{d}\alpha = \int_a^b g(t) \cdot \alpha'(t) \,\mathrm{d}t$$

Das Riemann-Stieltjes-Integral lässt sich in diesem Fall also durch das R-Integral der stetigen Funktion $g \cdot \alpha'$ darstellen.

Beweis. Sei $Z_n := \left\{t_0^{(n)}, \dots, t_{p(n)}^{(n)}\right\}$ Zerlegungsnullfolge von $[a,b]$. Nach dem Mittelwersatz gilt

$$\forall\, k = 1, \dots, p(n) \quad \exists\, \xi_k^{(n)} \in]t_{k-1}^{(n)}, t_k^{(n)}[: \alpha(t_k^{(n)}) - \alpha(t_{k-1}^{(n)}) = \alpha'(\xi_k^{(n)}) \cdot \left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right)$$

Wähle nun diese Punkte als Zwischenpunkte in den RS-Summen, dann gilt

$$\begin{aligned}
RS_\alpha(Z_n, \xi_k^{(n)}, g) &= \sum_{k=1}^{p(n)} g(\xi_k^{(n)}) \left(\alpha(t_k^{(n)}) - \alpha(t_{k-1}^{(n)}\right) \\
&= \sum_{k=1}^{p(n)} g(\xi_k^{(n)}) \cdot \alpha'(\xi_k^{(n)}) \cdot \left(t_k^{(n)} - t_{k-1}^{(n)}\right) \\
&= \sigma(Z_n, \xi_k^{(n)}, g \cdot \alpha')
\end{aligned}$$

Geht man auf beiden Seiten zum Grenzwert für $n \to \infty$ über, so erhält man die Behauptung, denn $g \cdot \alpha'$ ist stetig, also insbesondere Riemann-integrierbar. □

9.2.6 Eigenschaften des Riemann-Stieltjes-Integrals

Bemerkung. Analog zum R-Integral setzt man

$$\int_a^a g \,\mathrm{d}\alpha := 0, \int_a^b g \,\mathrm{d}\alpha := -\int_b^a g \,\mathrm{d}\alpha \text{ für } b \leq a$$

Satz. Seien $f, g, \alpha, \beta : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig, f, g bezüglich α, β RS-integrabel. Dann:

1. f ist auf $[c, d] \subseteq [a, b]$ RS-integrierbar,
2. $f + g$ und $\lambda \cdot f$ für $\lambda \in \mathbb{R}$ sind RS-integrabel bezüglich α und
$$\int_a^b f + g \,\mathrm{d}\alpha = \int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha + \int_a^b g \,\mathrm{d}\alpha, \quad \int_a^b \lambda f \,\mathrm{d}\alpha = \lambda \int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha$$
3. f ist auch RS-integrierbar bezüglich $\alpha + \beta$ sowie $\lambda\alpha$ auf $[a, b]$ und es gilt
$$\int_a^b f \,\mathrm{d}(\alpha + \beta) = \int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha + \int_a^b f \,\mathrm{d}\beta, \quad \int_a^b f \,\mathrm{d}(\lambda\alpha) = \lambda \int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha$$
4. $\left| \int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha \right| \leq \max\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| \cdot V_a^b(\alpha)$, sofern $\alpha \in BV([a, b])$
5. $\int_{a_1}^{a_2} f \,\mathrm{d}\alpha = \int_{a_1}^{a_3} f \,\mathrm{d}\alpha + \int_{a_3}^{a_2} f \,\mathrm{d}\alpha$ für alle $a_1, a_2, a_3 \in [a, b]$
6. Ist $f \leq g$, so gilt $\int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha \leq \int_a^b g \,\mathrm{d}\alpha$

9.2.7 Wegintegral entlang eines Weges

Nach diesen Vorbereitungen macht folgende Definition Sinn

Definition 9.2.3. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ ein rektifizierbarer Weg mit Bogen Γ_γ, $f : \Gamma_\gamma \to \mathbb{R}^N$ eine stetige Funktion. Dann heißt

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}x := \int_\gamma f \cdot \,\mathrm{d}\vec{x} := \sum_{i=1}^N \int_a^b f_i(\gamma(t)) \,\mathrm{d}\gamma_i(t)$$

Wegintegral von f entlang γ.

und es folgt sofort

Satz 9.2.4. Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ ein stetig differenzierbarer Weg mit Bogen Γ_γ, $f : \Gamma_\gamma \to \mathbb{R}^N$ stetig, dann gilt

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^N \int_a^b f_j(\gamma(t)) \,\mathrm{d}\gamma_j(t) = \sum_{j=1}^N \int_a^b f_j(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \,\mathrm{d}t = \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \,\mathrm{d}t$$

9.2.8 Eigenschaften

Es folgen die entsprechenden Eigenschaften für Wegintegrale, etwa

1. $\int_\gamma f + g \,\mathrm{d}x = \int_\gamma f \,\mathrm{d}x + \int_\gamma g \,\mathrm{d}x$, $\int_\gamma \lambda f \,\mathrm{d}x = \lambda \int_\gamma f \,\mathrm{d}x$
2. $\int_{\gamma_1 \oplus \gamma_2} f \,\mathrm{d}x = \int_{\gamma_1} f \,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_2} f \,\mathrm{d}x$
3. $\left|\int_\gamma f \,\mathrm{d}x\right| \leq \max\limits_{x \in \Gamma_\gamma} \|f(x)\|_2 \cdot L(\gamma)$
4. $\int_{\gamma^-} f \,\mathrm{d}x = -\int_\gamma f \,\mathrm{d}x$

9.2.9 Wegunabhängigkeit von Wegintegralen

Sei $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ eine stetige Funktion und seien $\gamma, \tilde{\gamma} : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ rektifizierbare Wege mit gleichen Anfangs- und Endpunkten. Unter welchen Umständen gilt nun $\int_\gamma f \,\mathrm{d}x = \int_{\tilde{\gamma}} f \,\mathrm{d}x$?

Betrachten wir dazu ein Beispiel im $\mathbb{R}^2$ das Vektorfeld

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ y - x \end{pmatrix}$$

Sei $\gamma_1 = \gamma_1^1 \oplus \gamma_1^2$, wobei

$$\begin{aligned} \gamma_1^1 : [0,1] &\to \mathbb{R}^2 & \qquad \gamma_1^2 : [0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} & t &\mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

stückweise stetig differenzierbare Wege sind. Dann hat man

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} f \,\mathrm{d}x &= \int_{\gamma_1^1} f \,\mathrm{d}x + \int_{\gamma_1^2} f \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \left\langle f(\gamma_1^1(t)), \dot{\gamma}_1^1(t) \right\rangle \mathrm{d}t + \int_0^1 \left\langle f(\gamma_1^1(t)), \dot{\gamma}_1^2(t) \right\rangle \mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ -t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t + \int_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t \\ t-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_0^1 (t-1) \,\mathrm{d}t = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

Mit $\gamma_2 = \gamma_2^1 \oplus \gamma_2^2$, wobei

$$\begin{aligned} \gamma_2^1 : [0,1] &\to \mathbb{R}^2 & \qquad \gamma_2^2 : [0,1] &\to \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} & t &\mapsto \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_2} f\,\mathrm{d}x &= \int\limits_0^1 \langle f(\gamma_2^1(t)), \dot\gamma_2^1(t)\rangle\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 \langle f(\gamma_2^2(t)), \dot\gamma_2^2(t)\rangle\,\mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t + \int\limits_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1-t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t \\
&= \int\limits_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int\limits_0^1 1\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

Als drittes betrachte $\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ t^2 \end{pmatrix}$. Hier ist

$$\int_{\gamma_3} f\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^1 \left\langle \begin{pmatrix} t^2 \\ t^2 - t \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix} \right\rangle \mathrm{d}t = \int\limits_0^1 t^2 + 2t^3 - 2t^2\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}t^4 - \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{6}$$

Betrachtet man hingegen die Wegintegrale entlang derselben Wege, allerdings über das Vektorfeld $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix}$, so stellt man fest, dass sie alle gleich sind.

Folglich scheint es von der Form des Kraftfeldes abzuhängen, ob ein Wegintegral vom Weg abhängt. Immerhin gilt

Satz 9.2.5. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar und surjektiv, $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$ (d. h. φ ist orientierungstreu). Dann:

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}x = \int_{\gamma\circ\varphi} f\,\mathrm{d}x$$

Beweis. $\gamma \circ \varphi : [c,d] \to \mathbb{R}^N$ ist stetig differenzierbar und hat denselben Bogen wie γ, denn $\Gamma_{\gamma\circ\varphi} = (\gamma\circ\varphi)([c,d]) = \gamma([a,b]) = \Gamma_\gamma$. Damit hat man

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma\circ\varphi} f(x)\,\mathrm{d}x &= \int\limits_c^d \left\langle f(\gamma(\varphi(t))), (\gamma\circ\varphi)'(t)\right\rangle \mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^N \int\limits_c^d f_i(\gamma(\varphi(t))) \cdot \gamma_i'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \sum_{i=1}^N \int\limits_a^b f_i(\gamma(s)) \cdot \gamma_i'(s)\,\mathrm{d}s \\
&= \int\limits_a^b \langle f(\gamma(s)), \gamma'(t)\rangle\,\mathrm{d}s = \int_\gamma f(x)\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

9.3 Wegunabhängigkeit, konservative Kraftfelder

9.3.1 Wegzusammenhang

Definition 9.3.1. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$.

- D heißt **wegzusammenhängend**, wenn sich je zwei Punkte in D durch einen ganz in D verlaufenden Weg verbinden lassen.
- D heißt **sternförmig**, wenn es einen Punkt $x_0 \in D$ (ein sogenanntes **Zentrum**) gibt, sodass mit jedem Punkt $x \in D$ auch die Verbindungsstrecke $[[x_0, x]]$ in D liegt.

Bemerkung.

1. Konvexe Mengen sind sternförmig, aber eine sternförmige Menge ist nicht notwendigerweise konvex.
2. Jede sternförmige Menge ist wegzusammenhängend.
3. In Analysis II wurde gezeigt: Wegzusammenhang impliziert Zusammenhang. Die Umkehrung gilt im Allgemeinen nicht; aber: Ist $D \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, dann ist D wegzusammenhängend $\iff$ D zusammenhängend. *Das folgt daraus, dass jede offene Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ lokal wegzusammenhängend ist; siehe dazu [4].*

9.3.2 Gebiete, einfacher Zusammenhang, Deformieren

Definition 9.3.2.

i) Eine nicht-leere offene und zusammenhängende Menge $D \subseteq \mathbb{R}^N$ heißt **Gebiet**.

ii) Ein Gebiet $D \subseteq \mathbb{R}^N$ heißt **einfach zusammenhängend**, wenn sich jeder in D verlaufende geschlossene Weg innerhalb von D stetg in einer Punktkurve deformieren lässt. Hierbei heißt ein Weg $\gamma_1 : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ **stetig in einen Weg** $\gamma_2 : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ **in** D **deformierbar**, wenn es eine stetige Abbildung $H : [a, b] \times [0, 1] \to D$ gibt mit $H(0, \cdot) = \gamma_1$ und $H(1, \cdot) = \gamma_2$; ein Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ heißt **Punktkurve**, wenn $\gamma = \text{const}$ auf $[a, b]$ gilt.

Beispiele:

- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und $\left\{x \in \mathbb{R}^2 \mid \|x\|_2 < 1, x \neq 0\right\}$ sind zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend. Anschaulich sind im $\mathbb{R}^2$ alle Gebiete „ohne Löcher“ einfach zusammenhängend.
- $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ und $\left\{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x\|_2 < 1, x \neq 0\right\}$ sind einfach zusammenhängend.
- Der Torus ist nicht zusammenhängend, aber nicht einfach zusammenhängend.

9.3.3 Wegunabhängigkeit

Definition 9.3.3. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$ ein Gebiet, $f : D \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ stetig. Dann heißt $\int f \,\mathrm{d}x$ in D **wegunabhängig** (und f heißt **konservatives Vektor-/Kraftfeld**), wenn für je zwei Punkte $y_0, y_1 \in D$ gilt, dass $\int_\gamma f \,\mathrm{d}x$ den gleiche Wert besitzt für alle in D verlaufenden, rektifizierbaren Wege γ, die y_0 mit y_1 verbinden.

Bemerkung. Offensichtlich gilt:
f ist ein konservatives Vektorfeld $\iff$ $\int_\gamma f \,\mathrm{d}x = 0$ für jeden geschlossenen rektifizierbaren Weg γ in D

9.3.4 Stammfunktion

Definition 9.3.4. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^N$ ein Gebiet, $f : D \to \mathbb{R}^N$ stetig. Falls eine stetig partiell differenzierbare Funktion $p : D \to \mathbb{R}$ existiert mit $f : \operatorname{grad}(p)$ $(= \nabla p)$, dann heißt p **Stammfunktion** des Vektorfelds f ($-p$ heißt **Potential** des Kraftfelds) und f heißt dann **Gradientenfeld**.

Bemerkung. Der Satz von Schwarz liefter eine notwendige, aber im Allgemeinen nicht hinreichende Bedingung dafür, dass ein stetig differenzierbares Vektorfeld $f : D \to \mathbb{R}^N$ mit D Gebiet ein Gradientenfeld ist. Ist nämlich $f = \operatorname{grad} p$ und p zweimal stetig partiell differenzierbar, dann gilt

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} p = \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} p \quad \forall\, i, j = 1, \dots, N$$

oder

$$\frac{\partial}{\partial x_i} f_j = \frac{\partial}{\partial x_j} f_i \quad \forall\, i, j = 1, \dots, N$$

9.3.5 Beispiel

1.

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad f(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x - y \end{pmatrix} \quad \forall, (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

f ist stetig differenzierbar und mit $f = (f_1, f_2)$ ist

$$\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, y) = 1, \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) = 1$$

d. h. f erfüllt die notwendige Bedingung. Da $\mathbb{R}^2$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, ist die Bedingung sogar hinreichend, was wir im Satz 9.3.6 sehen werden.

Für eine Stammfunktion p von f muss gelten

$$f = \operatorname{grad} p \Rightarrow \begin{cases} f_1(x, y) = y = \frac{\partial p}{\partial x}(x, y) \Rightarrow p(x, y) = xy + c(y) \\ f_2(x, y) = x - y = \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) \end{cases}$$

mit einer gewissen stetig differenzierbaren Funktion $c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Setzt man die gefundene Form aus der ersten in die Bedingung der zweiten Zeile ein, so erhält man

$$x - y = \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}(xy + c(y)) = x + c'(y)$$

also muss $c'(y) = -y$ sein, d. h. $h(y) = -\frac{y^2}{2} + C$ mit $C \in \mathbb{R}$. Somit ist f ein Gradientenfeld und $p(x, y) = xy + \frac{y^2}{2}$ eine Stammfunktion von f.

2.

$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad g(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ y - x \end{pmatrix} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

g ist stetig differenzierbar, aber

$$\frac{\partial g_1}{\partial y}(x, y) = 1 \neq -1 = \frac{\partial g_2}{\partial x}(x, y)$$

g kann also kein Gradientenfeld sein.

9.3.6 Konservative Vektorfelder sind genau die Gradientenfelder

Satz 9.3.5. Sei D ein Gebiet im $\mathbb{R}^N$, $f : D \to \mathbb{R}^N$ stetig. Dann gilt

$$\boxed{f \text{ ist konservativ} \iff f \text{ ist ein Gradientenfeld}}$$

In diesem Fall gilt

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}x = p(y_1) - p(y_0)$$

für jeden ganz in D verlaufenden rektifizierbaren Weg γ mit Anfangspunkt y_0 und Endpunkt y_0.

Beweis. Sei zunächst f ein Gradientenfeld, d. h. $f = \operatorname{grad} p$, $y_0, y_1 \in D$.

1. Fall: Sei γ ein stetig differenzierbarer Weg mit Anfangspunkt y_0 und Endpunkt y_1. Dann ist

$$\begin{aligned} \int_\gamma f \, \mathrm{d}x &= \int_a^b \langle f(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, \mathrm{d}t = \int_a^b \langle \operatorname{grad}(\gamma(t)), \dot{\gamma}(t) \rangle \, \mathrm{d}t \\ &= \int_a^b \frac{\mathrm{d}(p \circ \gamma)}{\mathrm{d}x}(t) \, \mathrm{d}t = p(\gamma(b)) - p(\gamma(a)) = p(y_1) - p(y_0) \end{aligned}$$

2. Fall: Sei γ nun nur noch als rektifizierbar vorausgesetzt. Da D offen ist, Γ der Bogen von γ, eine kompakte Teilmenge von D ist, existiert eine offene beschränkte Menge D_0 mit $\Gamma \subset D_0 \subseteq \overline{D_0} \subset D$. Weil f auf D stetig ist, ist f auf der kompakten Menge $\overline{D_0}$ gleichmäsig stetig, d.h

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : \; \|x - y\| < \delta \Rightarrow \|f(x) - f(y)\| < \epsilon \quad \forall x, y \in \overline{D_0}$$

Zerlege dann $[a,b]$ in Teilintervalle $[a_i,b_i]$, $i = 1,\dots,k$, sodass für die Teilwege $\gamma_i = \gamma|_{[a_i,b_i]}$ gilt: $L(\gamma_i) < \delta$. Betrachte weiter die Wegstrecken s_i von $[[\gamma(b_i),\gamma(a_i)]]$ (Achtung, hier orientiert!). Dann gilt für jedes $i = 1,\dots,k$

$$\int_{\gamma_i\oplus s_i} f(\gamma_i(a_i))\,\mathrm{d}x = 0 \quad (f(\gamma_i(a_i)) = \text{const}),$$

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_i\oplus s_i} f\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{\gamma_i\oplus s_i} f(x) - f(\gamma_i(a_i))\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \max_{x\in\mathrm{im}(\gamma_i\oplus s_i)} \|f(x) - f(\gamma_i(a_i))\| \cdot L(\gamma_i\oplus s_i) \\ &\le \epsilon\,(L(\gamma_i) + L(s_i)) \le 2\epsilon L(\gamma_i), \\ \int_{\gamma_i\oplus s_i} f\,\mathrm{d}x &= \int_\gamma f\,\mathrm{d}x + \int_{s_i} f\,\mathrm{d}x = \int_\gamma f\,\mathrm{d}x + p(\gamma(b_i)) - p(\gamma(a_i))\end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned}\left|\int_\gamma f\,\mathrm{d}x - (p(y_1) - p(y_0))\right| &= \left|\sum_{i=1}^k \left[\int_{\gamma_i} f\,\mathrm{d}x - (p(\gamma(b_i)) - p(\gamma(a_i)))\right]\right| \\ &= \left|\sum_{i=1}^k \int_{\gamma_i\oplus si} f\,\mathrm{d}x\right| \le \sum_{i=1}^k \left|\int_{\gamma_i\oplus si} f\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \sum_{i=1}^k 2\epsilon L(\gamma_i) = 2\epsilon L(\gamma)\end{aligned}$$

Da ϵ beliebig war, folgt

$$\int_\gamma f\,\mathrm{d}x = p(y_1) - p(y_0)$$

und $\int f\,\mathrm{d}x$ ist folglich unabhängig vom Weg.

Sei nun $\int f\,\mathrm{d}x$ wegunabhängig in D. Sei $x_0 \in D$. Setze für $x \in D$

$$p(x) := \int_{x_0}^{x} f\,\mathrm{d}y = \int_\gamma f\,\mathrm{d}y$$

wobei γ ein beliebiger rektifizierbarer Weg in D mit Anfangspunkt x_0 und Endpunkt x ist. Wir wollen zeigen, dass p stetig partiell differenzierbar ist und $\frac{\partial}{\partial x_i} p = f_i$ für jedes $i = 1,\dots,N$.

Sei also $x \in D$, $i \in \{1,\dots,N\}$, $h \in \mathbb{R}^*$ genügend klein, sodass $[[x, x+h\cdot e_i]] \subseteq D$. Dann gilt

$$\frac{p(x+h\cdot e_i) - p(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_x^{x+h\cdot e_i} f\,\mathrm{d}y = \frac{1}{h}\int_0^1 \langle f(\gamma(t)),\dot\gamma(t)\rangle\,\mathrm{d}t$$

wobei $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^N$, $\gamma(t) = x + t \cdot (h \cdot e_i)$. Weiter:

$$\begin{aligned} \ldots &= \frac{1}{h} \int\limits_0^1 \langle f(x + t \cdot (h \cdot e_i)), h \cdot e_i \rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^1 f_i(x + t \cdot (h \cdot e_i)) \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Also gilt

$$\begin{aligned} \left| \frac{p(x + h \cdot e_i) - p(x)}{h} - f_i(x) \right| &= \left| \int\limits_0^1 (f_i(x + t \cdot (h \cdot e_i)) - f_i(x)) \,\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \max_{t \in [0,1]} \| f_i(x + t \cdot (h \cdot e_i)) - f_i(x) \| \xrightarrow{h \to 0} 0 \end{aligned}$$

wegen der Stetigkeit von f_i. Das zeigt, dass p auf D stetig partiell differenzierbar ist mit $\frac{\partial}{\partial x_i} p = f_i$. □

9.3.7 Integrabilität in einfach zusammenhängenden Gebieten

Wir hatten bereits gesehen, dass die folgende **Integrabilitätsbedingung**

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad \forall\, i, j = 1, \ldots, N$$

für ein stetig partiell differenzierbares Vektorfelds $f : D \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$, D Gebiet, eine notwendige Bedingung dafür ist, dass f ein Gradientenfeld ist (also $f = \operatorname{grad} p$ für ein zweimal stetig partiell differenzierbares $p : D \to \mathbb{R}^N$ gilt).

Satz 9.3.6. Wenn $D \subseteq \mathbb{R}^N$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist, $f : D \to \mathbb{R}^N$ stetig partiell differenzierbar, dann gilt:

$$\boxed{f \text{ ist ein Gradientenfeld} \iff \text{die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt.}}$$

Beweis. „$\Leftarrow$“: Betrachte zunächst den Fall, dass D ein sternförmiges Gebiet ist, d. h. es gibt ein $a \in D$, sodass $\forall\, x \in D\ :\ [[a, x]] \subseteq D$.

Sei $x \in D$, $\gamma(t) = a + t(x - a)$, $0 \leq t \leq 1$ der Weg von a nach x. Weiterhin

$$\begin{aligned} \varphi(x) &:= \int_\gamma f \,\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_0^1 \langle f(a + t(x - a)), (x - a) \rangle \,\mathrm{d}t \\ &= \int\limits_0^1 \underbrace{\sum_{k=1}^N f_k(a + t(x - a))(x_k - a_k)}_{=:g(x,t)} \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Wir wollen zeigen, dass φ auf D partiell differenzierbar ist mit $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi = f_i$. Dazu bemerken wir, dass g stetig partiell differenzierbar ist mit

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x_i}(x,t) &= f_i(a+t(x-a)) + \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f_k}{\partial y_i}(a+t(x-a)) \cdot t \cdot (x_k - a_k) \\ &= f_i(a+t(x-a)) + t\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial f_i}{\partial x_k}(a+t(x-a))(x_k - a_k) \\ &= \underbrace{f_i(a+t(x-a))}_{=:h(t)} + t \cdot \langle \operatorname{grad} f_i(a+t(x-a)), x-a\rangle\end{aligned}$$

wobei das zweite Gleichheitszeichen durch die Integrabilitätsbedingung gerechtfertigt wird. Klar ist: h ist stetig differenzierbar mit

$$\dot{h}(t) = \langle \operatorname{grad} f_i(a+t(x-a)), x-a\rangle$$

also gilt

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}(x,t) = h(t) + t \cdot \dot{h}(t)$$

Folglich ist

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x,t)\,\mathrm{d}t &= \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 t\cdot\dot{h}(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t + [t\cdot h(t)]_0^1 - \int_0^1 h(t)\,\mathrm{d}t = h(1) = f_i(x)\end{aligned}$$

Da g bezüglich x_i stetig differenzierbar ist, und dies sogar gleichmäßig in t, gilt außerdem, dass $\varphi(x) = \int_0^1 g(x,t)\,\mathrm{d}t$ für $x \in D$ stetig partiell differenzierbar ist mit

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 \frac{\partial g}{\partial x_i}(x,t)\,\mathrm{d}t = f_i(x)$$

Kommen wir nun zum allgemeinen Fall: D sei also lediglich einfach zusammenhängend und es gelte die Integrabilitätsbedingung. Wir zeigen, dass $\int_\gamma f\,\mathrm{d}x = 0$ für alle geschlossenen rektifizierbaren Wege γ in D gilt.

Sei also γ solch ein Weg. Da D einfach zusammenhängend ist, ist γ stetig in eine Punktkurve deformierbar.

TODO: Skizze □

9.3.8 Wegintegrale skalarwertiger Funktionen

Abschließend wenden wir uns Wegintegralen über Skalarfeldern zu. Als physikalische Motivation dient hierzu die Massenbestimmung eines gebogenen Drahtes:

Wir fassen den Draht als rektifizierbaren Weg $g : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ auf. Ist nun die Massendichteverteilung durch eine stetige Funktion $f : \Gamma_f \to \mathbb{R}$ gegeben, so können wir die Gesamtmasse des Drahtes durch

$$\sum_{i=1}^{k} f(\gamma(\xi_i))(s(t_i) - s(t_{i-1}))$$

approximieren. Dabei sei $s : [a,b] \to [0, L(\gamma)]$ die Weglängenfunktion von γ. Da sie und $f \circ \gamma$ auf $[a,b]$ stetig sind, folgt

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{k} f(\gamma(\xi_i))(s(t_i) - s(t_{i-1}))}_{\text{RS-Summenfolge}} \overset{|Z|\to 0}{\longrightarrow} \underbrace{\int_a^b f(\gamma(t))\,\mathrm{d}s(t)}_{\text{RS-Integral von } f\circ\gamma \text{ bezüglich } s}$$

Dies motiviert folgende

Definition 9.3.7. Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ ein rektifizierbarer Weg, $f : \Gamma_f \to \mathbb{R}$ stetig, dann definiere

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}s := \int_a^b f(\gamma(t))\,\mathrm{d}s(t)$$

Bemerkung. Wenn γ stetig differenzierbar ist, dann folgt

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t)) \cdot \dot{s}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(\gamma(t)) \left\|\dot{\gamma}(t)\right\|_2 \mathrm{d}t$$

10 Riemann-Integration im Mehrdimensionalen

10.1 Grundlegendes

10.1.1 Bezeichnungen

Wir beginnen mit einigen Bezeichnungen:

- Für reelle Zahlen a_i, b_i mit $a_i \leq b_i$ $(i = 1, \ldots, N,\ N \in \mathbb{N})$ heiße

  $Q := [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N]$ **kompakter N-dimensionaler Quader**,

  $\mathring{Q} := \,]a_1, b_1[\, \times \ldots \times \,]a_N, b_N[$ **offener N-dimensionaler Quader**

- Das **Volumen eines Quaders** wird definiert als $\operatorname{vol}(Q) := \operatorname{v}(Q) := \prod_{i=1}^{N} (b_i - a_i)$, egal ob er offen oder kompakt ist.
- Sei $Q = [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N]$ kompakter Quader. Eine **Zerlegung** Z von Q ist ein N-Tupel $(Z_1, \ldots, Z_N)$, wobei Z_i für jedes $i = 1, \ldots, N$ eine Zerlegung von $[a_i, b_i]$ ist. Wenn Z_i das Intervall $[a_i, b_i]$ in N_i Teilintervalle zerlegt, dann zerlegt Z den Quader Q in $\prod_{i=1}^{N} N_i$ Unterquader.
- Sei nun $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ ein kompakter Quader, $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, Z eine Zerlegung von Q, dann definiere

$$s(Z, f) := \sum_{K \in Z \text{ Unterquader}} m_K(f) \cdot v(K), \qquad m_K(f) := \inf f(K)$$
$$S(Z, f) := \sum_{K \in Z \text{ Unterquader}} M_K(f) \cdot v(K), \qquad M_K(f) := \sup f(K)$$

  $s(Z, f)$ heißt **Riemann'sche Untersumme von f bezüglich** Z, $S(Z, f)$ entsprechend **Riemann'sche Obersumme von f bezüglich** Z.

10.1.2 Verfeinerungen von Zerlegungen

Im Folgenden seien, wenn nichts anderes gesagt wird, $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ ein kompakter Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Wie im Fall $N = 1$ zeigt man

Lemma 10.1.1. Sei Z eine Zerlegung von Q. Z' sei eine **Verfeinerung** von Z (d. h. jeder Unterquader von Z' ist enthalten in einem Unterquader von Z). Dann gilt

$$s(Z, f) \leq s(Z', f), \quad S(Z', f) \leq S(Z, f)$$

Beweis. Seien K ein Unterquader von Z, $K_1, \ldots, K_p$ Unterquader von Z' mit $K = \bigcup_{i=1}^{p} K_i$, dann gilt

$$m_K(f) \leq m_{K_i}(f) \quad \forall i = 1, \ldots, p$$

also

$$m_K(f)\cdot v(K) = \sum_{i=1}^{p} m_K(f)v(K_i) \le \sum_{i=1}^{p} m_{K_i}(f)\cdot v(K_i)$$

Da dies für jeden Unterquader K von Z gilt, folgt $s(Z,f) \le s(Z',f)$. □

Korollar 10.1.2. Wenn Z, Z' Zerlegungen des kompakten Quaders $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ sind, $f:\ Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, dann gilt $s(Z,f) \le S(Z',f)$.

Beweis. Betrachte die **Überlagerung** $Z \cup Z' := (Z_1 \cup Z_1') \times \ldots \times (Z_N \cup Z_N')$, die eine gemeinsame Verfeinerung von Z und Z' darstellt. Dann folgt mit dem vorhergenden Lemma

$$s(Z,f) \le s(Z\cup Z', f) \le S(Z \cup Z', f) \le S(Z', f)$$

□

10.1.3 Riemann-Integral

Definition 10.1.3. $f:\ Q \to \mathbb{R}^N$ heißt **Riemann-integrierbar** über Q, wenn gilt

$$\underbrace{\underline{\int_Q} f\,\mathrm{d}x}_{\text{unteres R-Integral}} := \sup_{\substack{Z \text{ Zerlegung} \\ \text{von } Q}} s(Z,f) = \inf_{\substack{Z \text{ Zerlegung} \\ \text{von } Q}} S(Z,f) =: \underbrace{\overline{\int_Q} f\,\mathrm{d}x}_{\text{oberes R-Integral}}$$

und in diesem Fall heißt der gemeinsame Wert, bezeichnet mit

$$\int_Q f\,\mathrm{d}x, \int_Q f(x)\,\mathrm{d}x \text{ oder } \int_Q f(x_1,\ldots,x_n)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_n),$$

Riemann-Integral von f über Q. Wir setzen

$$\mathcal{R}(Q) := \{f:\ Q \to \mathbb{R} \mid f \text{ R-integrierbar}\}$$

Als Beispiele untersuchen wir

1. $f:\ Q \to \mathbb{R}, x \mapsto c$ für ein festes $c \in \mathbb{R}$. Dann gilt für jede Zerlegung Z von Q

   $$s(Z,f) = \sum_{K\in Z} m_K(f)v(K) = c\cdot v(Q) = \sum_{K \in Z} M_K(f)v(K) = S(Z,f)$$

   also ist $f \in \mathcal{R}(Q)$ und $\int_Q f\,\mathrm{d}x = c \cdot v(Q)$.

2.
   $$\begin{aligned} f:\ [0,1]\times[0,1] &\to \mathbb{R} \\ (x,y) &\mapsto \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

   Für jede beliebige Zerlegung Z von $[0,1]\times[0,1]$ gilt

   $$s(Z,f) = \sum_{K\in Z} m_K(f)v(K) = 0,$$

da $m_K(f) = 0$, denn in jedem Rechteck $K \subseteq [0,1] \times [0,1]$ gibt es Punkte (x, y) mit $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Analog sieht man

$$S(Z, f) = \sum_{K \in Z} M_K(f) v(K) = 1$$

ein. Folglich hat man

$$\underline{\int}_{[0,1]\times[0,1]} f \,\mathrm{d}x = 0 \neq 1 = \overline{\int}_{[0,1]\times[0,1]} f \,\mathrm{d}x$$

also $f \notin \mathcal{R}(Q)$.

10.1.4 Sätze zum Riemann-Integral

Die nachfolgenden Sätze beweist man analog wie im Fall $N = 1$.

Satz 10.1.4 (Riemann'sches Integrabilitätskriterium)**.** Es gilt

$$\boxed{f \in \mathcal{R}(Q) \iff \exists Z \text{ Zerlegung von } Q\text{: } S(f, Z) - s(f, Z) < \epsilon}$$

Satz. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ durchweg ein kompakter Quader.

1. Seien $f \in \mathcal{R}(Q)$, $g : Q \to \mathbb{R}$ Funktionen mit $g = f$ außer an endlich vielen Punkten, dann ist auch $g \in \mathcal{R}(Q)$ und $\int_Q f \,\mathrm{d}x = \int_Q g \,\mathrm{d}x$. „Endlich" kann hier nicht durch „abzählbar" ersetzt werden, als Gegenbeispiele dienen auch hier die Abwandlungen der Dirichlet-Funktion, ähnlich der oben in Beispiel 2 gegebenen.

2. Sind $f, g \in \mathcal{R}(Q)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, so sind auch $f + g, \lambda f \in \mathcal{R}(Q)$ und es gilt

$$\int_Q f + g \,\mathrm{d}x = \int_Q f \,\mathrm{d}x + \int_Q g \,\mathrm{d}x, \quad \int_Q \lambda f \,\mathrm{d}x = \lambda \int_Q f \,\mathrm{d}x$$

   $\mathcal{R}(Q)$ ist also ein Untervektorraum aller Funktionen auf Q.

3. Falls $f, g \in \mathcal{R}(Q)$, $f \leq g$ auf Q, dann gilt auch $\int_Q f \,\mathrm{d}x \leq \int_Q g \,\mathrm{d}x$.

4. Wenn $f \in \mathcal{R}(Q)$, dann ist auch $|f| \in \mathcal{R}(Q)$ und es ist $\left|\int_Q f \,\mathrm{d}x\right| \leq \int_Q |f| \,\mathrm{d}x$.

10.1.5 Riemann'sche Zwischensummen, Riemann-Folgen

Definition. Sei Z eine Zerlegung von Q in Unterquader $K_1, \ldots, K_p$, dann heißt $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^p)$ mit $\xi_i \in K_i$ ein **Zwischenvektor** der Zerlegung Z und

$$\sigma(Z, \xi, f) = \sum_{i=1}^{p} f(\xi) v(K_i)$$

Riemann'sche (Zwischen-)Summe.

Für eine Zerlegungsnullfolge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d. h. es gilt $|Z_n| \to 0$, mit zugehöriger Zwischenvektorfolge $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt $(\sigma(Z_n, \xi_n, f))_{n\in\mathbb{N}}$ **Riemann-Folge** zu f.

Satz 10.1.5. Seien $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ ein kompakter Quader und $f : Q \to \mathbb{R}$, dann ist

$$\boxed{f \in \mathcal{R}(Q) \iff \text{Jede Riemann-Folge konvergiert gegen einen Grenzwert.}}$$

Bemerkung. Der Grenzwert ist natürlich eindeutig, zum Beweis betrachte man wie im Fall $N = 1$ Mischfolgen.

Mit Hilfe dieses Kriteriums beweist man:

Satz. Jede stetige Funktion $f : Q \to \mathbb{R}$ auf einem kompakten Quader $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ ist R-integrierbar.

Beweis. Da f auf dem Kompaktum Q stetig ist, ist die Funktion sogar gleichmäßig stetig, d. h. für alle $\epsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$, sodass

$$\|x - y\| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{v(Q)} \quad \forall\, x, y \in Q$$

Somit gilt für jede beliebige Zerlegung Z mit $\operatorname{diam} K < \delta$ für jeden Unterquader K von Z

$$S(Z, f) - s(Z, f) = \sum_{K \in Z} (M_K(f) - m_K(f))\, v(K) \leq \frac{\epsilon}{v(Q)} \sum_{K \in Z} v(K) = \epsilon$$

□

10.1.6 Beispiel zur expliziten Bestimmung des Integrals

Betrachten wir zum Beispiel

$$\begin{aligned} f :\ [0,1] \times [0,1] &\to \mathbb{R}, \\ (x, y) &\mapsto x \cdot y \end{aligned}$$

f ist stetig, also $\in \mathcal{R}([0,1] \times [0,1])$ und

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y) = \lim_{n\to\infty} \sigma(Z_n, \xi_n, f)$$

für jede beliebige Zerlegungsnullfolge $Z_n = (Z_n^1, \dots, Z_n^2)$, wobei wir konkret wählen $Z_n^1 = Z_n^2 = \left\{0, \frac{1}{n}, \dots, 1\right\}$, und jede passende Zwischenvektorfolge ξ_n, hier $\xi_n = (\frac{i}{n}, \frac{j}{n})$ für $i, j = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_{[0,1]\times[0,1]} f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y) &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} f\left(\frac{i}{n}, \frac{j}{n}\right) \frac{1}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{i \cdot j}{n^4} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^4} \left(\sum_{i=1}^{n} i\right) \left(\sum_{j=1}^{n} j\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \,(n+1)^2}{4n^4} = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Hier gilt also

$$\underbrace{\int_{[0,1]\times[0,1]} f(x, y)\, \mathrm{d}(x, y)}_{\text{Mehrfachintegral}} = \underbrace{\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}x\right) \mathrm{d}y = \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y)\, \mathrm{d}y\right) \mathrm{d}x}_{\text{iterierte einfache Integrale}}$$

Wir werden sehen, dass diese Aufspaltung von Mehrfachintegralen in mehrere iterierte einfache Integrale und gewissen Voraussetzungen allgemein möglich ist (insbesondere für stetige f). Das ist Inhalt des **Satzes von Fubini**.

10.1.7 Nullmengen

Definition 10.1.6. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$ eine beliebige Menge.

i) A hat **(N-dimensionales) Maß** $0 :\iff \forall \epsilon > 0$ existiert eine abzählbare Überdeckung $(Q_i)_{i\in I}$ von A durch N-dimensionale Quader Q_i so, dass $\sum_{i\in I} v(Q_i) < \epsilon$ gilt.

ii) A hat **(N-dimensionales) Jordan-Maß** $0 :\iff \forall \epsilon > 0$ existiert eine endliche Überdeckung $(Q_i)_{i\in I}$ von A durch N-dimensionale Quader Q_i so, dass $\sum_{i\in I} v(Q_i) < \epsilon$ gilt.

Facts.

1. In beien Definitionen können die Q_i sowohl abgeschlossen als auch offen gewählt werden.
2. Wenn $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}^N$ und M (Jordan-)Maß 0 hat, dann gilt dies auch für B.
3. Endliche Punktmengen haben Jordan-Maß 0. Jede Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^N$ hat Maß 0, und sogar Jordan-Maß 0, wenn sie beschränkt ist und nur endlich viele Häufungspunkte besitzt.

Lemma 10.1.7. Seien $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ abzählbar viele Teilmengen des $\mathbb{R}^N$ mit (N-dimensionalem) Maß 0. Dann hat auch $\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ (N-dimensionales) Maß 0.

Beweis. Sei $\epsilon > 0$. Da jedes A_i Maß 0 hat, existieren zu jedem $i \in \mathbb{N}$ abzählbar viele Quader $\left(Q_j^{(i)}\right)_{j\in\mathbb{N}}$ mit $A_i \subseteq \bigcup_{j\in\mathbb{N}} Q_j^{(i)}$ und so, dass $\sum_{j\in\mathbb{N}} v(Q_j^{(i)}) < \frac{\epsilon}{2^i}$. Dann folgt: $\left\{Q_j^{(i)}\right\}_{i,j\in\mathbb{N}}$ ist eine abzählbare Familie von Quadern mit

$$A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \subseteq \bigcup_{i,j\in\mathbb{N}} Q_j^{(i)} \quad \text{und} \quad \sum_{i,j\in\mathbb{N}} v(Q_j^{(i)}) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon$$

□

Lemma 10.1.8. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$ kompakt. Dann gilt: A hat Maß 0 genau dann, wenn A Jordan-Maß 0 hat.

Beweis. „$\Leftarrow$“ gilt immer, „$\Rightarrow$“ ist klar wegen der Kompaktheit. □

Bemerkung. Für nicht-kompakte Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ gilt die zweite Implikation im Allgemeinen nicht. Betrachte zum Beispiel $\{n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$. $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ hat zwar Maß 0, aber für $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$ können die Quader (hier Intervalle), die die Menge überdecken, die Länge $\frac{1}{2}$ nicht überschreiten. d. h. aber, da alle Punkte untereinander mindestens Abstand 1 haben, dass es für jeden Punkt einen Quader geben muss, der ihn überdeckt. Das müssen unendlich viele sein.

10.1.8 Lebesgue'sches Integrabilitätskriterium

Das folgende Kriterium wurde im Skript zu Analysis I schon angemerkt, nun können wir es kurz und prägnant formulieren:

Satz 10.1.9 (Lebesgue'sches Integrabilitätskriterium)**.** Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ ein kompakter Quader, $f : Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann gilt

$$\boxed{f \in \mathcal{R}(Q) \iff U := \{x \in Q \mid f \text{ ist nicht stetig in } x\} \text{ hat Maß } 0.}$$

Zum Beweis des Satzes benutzen wir die Hilfsfunktion

$$\omega_f(x) := \lim_{\delta \searrow 0} \left(M_{B_\delta(x)}(f) - m_{B_\delta(x)}(f) \right)$$

Es ist $M_{B_\delta(x)}(f) - m_{B_\delta(x)}(f) \geq 0$ und fallend für $\delta \searrow 0$, d. h. der Limes, und damit ω_f, ist wohldefiniert. Die Funktion heißt **Oszillation von** f. Offensichtlich gilt das folgende

Lemma 10.1.10. Unter den Voraussetzungen des Satzes gilt

i) f ist in $x \in Q$ stetig $\iff \omega_f(x) = 0$.

ii) $\forall\, \epsilon > 0 \,:\, U_\epsilon = \{x \in Q \mid \omega_f(x) \geq \epsilon\}$ ist abgeschlossen.

Beweis. des Lemmas:

i) klar.

ii) Sei ein $\epsilon > 0$ vorgelegt, $x \in Q \setminus U_\epsilon$, d. h. $\omega_f(x) < \epsilon$. Nach der Definition von ω_f folgt
$$\exists\, \delta_0 > 0 \,:\, M_{B_{\delta_0}(x)}(f) - m_{B_{\delta_0}(x)}(f) < \epsilon$$
Dann folgt aber, dass $B_{\delta_0}(x) \subseteq Q \setminus U_\epsilon$, denn ist $y \in B_{\delta_0}(x)$, dann gibt es ein $\delta_1 > 0$ mit $B_{\delta_1}(y) \subseteq B_{\delta_0}(x)$, und es ist
$$M_{B_{\delta_1}(y)}(f) - m_{B_{\delta_1}(y)}(f) \leq M_{B_{\delta_0}(x)}(f) - m_{B_{\delta_0}(x)}(f) < \epsilon$$
also $\omega_f(y) < \epsilon$, also $y \in A \setminus U_\epsilon$.

□

Nun zum Beweis des Satzes:

Beweis. „$\Rightarrow$": Es sei $f \in \mathcal{R}(Q)$, zu zeigen ist, dass U das Maß 0 hat. Bemerke, dass $U = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} U_{\frac{1}{n}}$, wobei wie oben $U_{\frac{1}{n}} := \left\{x \in Q \mid \omega_f(x) \geq \frac{1}{n}\right\}$ sei. Nach Lemma 10.1.7 genügt es zu zeigen, dass jede der Mengen $U_{\frac{1}{n}}$ eine Nullmenge ist. Sei also $n \in \mathbb{N}$ im Folgenden fest.

Sei $\epsilon > 0$. Da $f \in \mathcal{R}(Q)$ gilt, existiert eine Zerlegung Z von Q mit $S(Z, f) - s(Z, f) < \frac{\epsilon}{n}$. Sei nun $\mathcal{S}$ die Familie der Unterquader K der Zerlegung Z, für die gilt: $\mathring{K} \cap U_{\frac{1}{n}} \neq \emptyset$.

Dann gilt: $\mathcal{S}$ ist eine endliche Familie von Quadern mit $U_{\frac{1}{n}} \subseteq \bigcup_{K\in\mathcal{S}} K$ und es ist

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{K\in\mathcal{S}} v(K) &\leq \sum_{K\in\mathcal{S}} \left(M_K(f) - m_K(f)\right) v(K)\\ &\leq \sum_{K\in Z} \left(M_K(f) - m_K(f)\right) v(K)\\ &= S(Z,f) - s(Z,f) < \frac{\epsilon}{n}\end{aligned}$$

also $\sum_{K\in\mathcal{S}} v(K) < \epsilon$.

„$\Leftarrow$“: Sei $\epsilon > 0$ vorgelegt. Es ist zu zeigen, dass eine Zerlegung Z von Q existiert mit $S(Z,f) - s(Z,f) < \epsilon$. Nach Voraussetzung ist $U = \{$Unstetigkeitsstellen von $f\}$ eine Nullmenge. Da $U_\epsilon = \{x \in Q \mid \omega_f(x) \geq \epsilon\} \subseteq U$, hat auch U_ϵ Maß 0. Nach dem vorangegangenen Lemma ist U_ϵ abgeschlossen, also als Teilmenge der kompakten Menge Q ebenfalls kompakt. Damit hat U_ϵ nach Lemma 10.1.8 sogar Jordan-Maß 0. d. h. es existieren N-dimensionale Quader $K_1, \ldots, K_p$ mit

$$U_\epsilon \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} K_i \quad \text{und} \quad \sum_{i=1}^{p} v(K_i) < \epsilon$$

Wähle nun eine Zerlegung Z von Q mit der Eigenschaft, dass jeder Unterquader von Z zu genau einer der beiden folgenden Familien gehört:

- $\mathcal{S}_1$: Unterquader K von Z mit $K \subseteq K_i$, oder
- $\mathcal{S}_2$: Unterquader K von Z mit $K \cap U_\epsilon = \emptyset$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}S(Z,f) - s(Z,f) &= \sum_{K\in\mathcal{S}_1} \left(M_K(f) - m_K(f)\right) v(K) + \sum_{K\in\mathcal{S}_2} \left(M_K(f) - m_K(f)\right) v(K)\\ &\leq 2\left\|f\right\|_\infty \sum_{K\in\mathcal{S}_1} v(K) + \epsilon \sum_{K\in\mathcal{S}_2} v(K)\\ &\leq 2\left\|f\right\|_\infty \sum_{i=1}^{p} v(K_i) + \epsilon \cdot v(Q)\\ &\leq \left(2\left\|f\right\|_\infty + v(Q)\right)\epsilon\end{aligned}$$

□

Facts. Seien $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ ein kompakter Quader und $f, g\colon\ Q \to \mathbb{R}$ beschränkt.

1. f stetig $\Rightarrow f \in \mathcal{R}(Q)$.
2. Wenn $f, g \in \mathcal{R}(Q)$ und $f = g$ auf Q mit eventueller Ausnahme einer Menge vom Maß 0 (man sagt dann „$f = g$ fast überall“), dann gilt schon $\int_Q f\,\mathrm{d}x = \int_Q g\,\mathrm{d}x$.
3. Sind $f, g \in \mathcal{R}(Q)$, so sind auch $|f|, f^+, f^-, \max\{f,g\}, \min\{f,g\}, f\cdot g \in \mathcal{R}(Q)$, und wenn es ein $\alpha > 0$ gibt so, dass für alle $x \in Q$ gilt $|g(x)| \geq \alpha$, dann ist auch $\frac{f}{g} \in \mathcal{R}$.
4. $f \in \mathcal{R}(Q)$, $f(Q) \subseteq [a,b]$, $h \in C([a,b])$, dann ist $h \circ f \in \mathcal{R}(Q)$.

Bemerkung. In 4. darf die Voraussetzung $h \in C([a,b])$ nicht durch $h \in \mathcal{R}(Q)$ ersetzt werden.

10.2 Satz von Fubini, iterierte Integrale

10.2.1 Motivation

Sei $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetige, positive Funktionen. Dann gilt:

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \text{ Volumen unterhalb des Graphen von } f$$

Betrachtet man eine Zerlegung $Z = \{t_0, \ldots, t_n\}$ von $[a,b]$, passende Zwischenpunkte ξ_i, dann sollte das Volumen unterhalb des Graphen von f über $[t_{i-1}, t_i] \times [c,d]$ ungefähr

$$(t_i - t_{i-1}) \cdot \int\limits_c^d f(\xi_i, y)\,\mathrm{d}y$$

entsprechen. Folglich sollte man annehmen können

$$\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \approx \sum_{i=1}^{n} (t_i - t_{i-1}) \int\limits_c^d f(\xi_i, y)\,\mathrm{d}y$$

Die rechte Seite ist nun eine Riemann'sche Zwischensumme der stetigen Funktion

$$[a,b] \ni x \mapsto \int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

Für $|Z| \to 0$ sollte also sich also ergeben

$$\int\limits_a^b \left(\int\limits_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \stackrel{!}{=} \int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

10.2.2 Satz von Fubini

In der Tat gilt der

Satz 10.2.1 (Satz von Fubini)**.** Seien $P \subseteq \mathbb{R}^N, Q \subseteq \mathbb{R}^M$ kompakte Quader, $f : P \times Q \to \mathbb{R}$ eine beschränkte, Riemann-integrierbare Funktion. Für $x \in P$ seien

$$g_x : Q \to \mathbb{R}, \quad y \mapsto f(x,y) \qquad U_f : P \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \underline{\int}_Q g_x(y)\,\mathrm{d}y \qquad O_f : P \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \overline{\int}_Q g_x(y)\,\mathrm{d}y$$

Dann gilt: $U_f, O_f \in \mathcal{R}(P)$ und

$$\int_{P\times Q} f(x,y)\,\mathrm{d}x, y = \int_P U_f(x)\,\mathrm{d}x = \int_P O_f(x)\,\mathrm{d}x$$

d. h.

$$\int_{P\times Q} f(x,y)\,\mathrm{d}x, y = \int_P \left(\underline{\int}_Q g_x(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_P \left(\overline{\int}_Q g_x(y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x$$

Bemerkung. Wenn f stetig ist, dann ist g_x für jedes $x \in P$ stetig, also Riemann-integrierbar und

$$\underline{\int_Q} g_x(y)\,\mathrm{d}y = \overline{\int_Q} g_x(y)\,\mathrm{d}y = \int_Q f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

also

$$\int_{P\times Q} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) = \int_P \int_Q f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_Q \int_P f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Inbesondere folgt iterativ für stetige $f : [a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N] \to \mathbb{R}$

$$\int\limits_{[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_N,b_N]} f(x_1,\ldots,x_N)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_N) = \int\limits_{a_1}^{b_1} \ldots \int\limits_{a_N}^{b_N} f(x_1,\ldots,x_N)\,\mathrm{d}x_N \ldots \mathrm{d}x_1$$

Im Allgemeinen muss der Satz von Fubini „ernst genommen werden“, in dem Sinne, dass für nur Riemann-integrierbares f die Funktion g_x im Allgemeinen nicht Riemann-integrierbar ist.

Beweis. Seien Z_P Zerlegung von P und Z_Q Zerlegung von Q; diese ergeben eine Zerlegung $Z = \{K_P \times K_Q \mid K_P \in Z_P, K_Q \in Z_Q\}$ von $P \times Q$. Dann gilt

$$\begin{aligned} s(Z,f) &= \sum_{K_P\in Z_P, K_Q\in Z_Q} m_{K_P\times K_Q}(f)\cdot v(K_P\times K_Q) \\ &= \sum_{K_P\in Z_P} \left(\sum_{K_Q\in Z_Q} m_{K_P\times K_Q}(f)\cdot v(K_Q) \right) \cdot v(K_P) \end{aligned}$$

Nun gilt für alle $x \in K_P$: $m_{K_P\times K_Q}(f) \leq m_{K_Q}(g_x)$, also

$$\begin{aligned} \sum_{K_Q\in Z_Q} m_{K_P\times K_Q}(f)\cdot v(K_Q) &\leq \sum_{K_Q\in Z_Q} m_{K_Q}(g_x)\cdot v(K_Q) \\ &= s(Z_Q, g_x) \leq \underline{\int_Q} g_x(y)\,\mathrm{d}y = U_f(x) \end{aligned}$$

Geht man zum Infimum über alle $x \in K_P$ über, so erhält man

$$\sum_{K_Q\in Z_Q} m_{K_P\times K_Q}(f)\cdot v(K_Q) \leq \inf_{x\in K_P} U_f(x) = m_{K_P}(U_f)$$

also insgesamt

$$s(Z,f) \leq \sum_{K_P\in Z_P} m_{K_P}(U_f)\cdot v(K_P) = s(Z_P, U_f)$$

Ähnlich zeigt man $S(Z,f) \geq S(Z_P, U_f)$, zusammen ergibt sich die Ungleichungskette

$$s(Z,f) \leq s(Z_P,U_f) \leq S(Z_P,U_f) \leq S(Z,f)$$

Aber $f \in \mathcal{R}(P \times Q)$, somit

$$\sup_Z s(Z_f) = \inf_Z S(Z,f) = \int_{P\times Q} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

also auch

$$\sup_Z s(Z_P, U_f) = \inf_Z S(Z_P, U_f) = \int_{P\times Q} f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$$

Andererseits gilt wegen der ersten Gleichheit auch $= \int_P U_f(x)\,\mathrm{d}x$, was zu zeigen war. Analoges für O_f. □

10.3 Integration über Jordan-messbare Teilmengen

10.3.1 Integration über mehr Mengen

Definition 10.3.1.

i) Seien $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ ein kompakter Quader, $A \subseteq Q$ und $f : A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Dann setzt man

$$f_A : Q \to \mathbb{R}, \quad f_A(x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

f heißt dann Riemann-integrierbar über A, wenn $f_B \in \mathcal{R}(Q)$. Man setzt dann

$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x := \int_A f_A(x)\,\mathrm{d}x$$

und man schreibt dann $f \in \mathcal{R}(A)$. Die Definition hängt nicht von Q ab.

ii) Für beliebige Mengen A, Ω mit $A \subseteq \Omega$ heißt

$$\chi_A : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \chi_A(x) := \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$$

charakteristische Funktion von $A \subseteq \Omega$.

Eine beschränkte Menge $A \subseteq \mathbb{R}^N$ heißt **Jordan-messbar**, wenn $\chi_A \in \mathcal{R}(A)$. Und in diesem Fall heißt $v(B) := |B| := \int_A \chi_A(x)\,\mathrm{d}x$ das **Volumen von** A (für $N = 1$ speziell Länge, für $N = 2$ Flächeninhalt), oder auch **(Jordan-)Inhalt von** A.

Bemerkung. Es ist klar, dass sich die elementaren Eigenschaften für Riemann-Integrale über Quadern (Linearität, Ordnungserhaltung etc.) auch auf Riemann-integrierbare Funktionen auf beliebigen beschränkten Mengen im $\mathbb{R}^N$ übertragen.

10.3.2 Jordan-Messbarkeit und Nullmengen

Satz 10.3.2.

i) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$ eine beschränkte Menge, dann gilt

$$\boxed{A \text{ ist Jordan-messbar} \iff \partial A \text{ hat } N\text{-dimensionales Maß } 0.}$$

ii) Seien $A \subseteq \mathbb{R}^N$ eine beschränkte, Jordan-messbare Menge, $f : A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, dann ist $f \in \mathcal{R}(A)$ genau dann, wenn $\{$Unstetigkeitsstellen von f in $A\}$ das Maß 0 hat.

Beweis.

i) A ist Jordan-messbar $\overset{\text{Definition}}{\iff} \chi_A \in \mathcal{R}(Q)$ für einen beliebigen kompakten Quader $Q \supseteq A \iff$ {Unstetigkeitsstellen von χ_A in Q} $= \partial A$ hat Maß 0.

ii) $f \in \mathcal{R}(A) \iff f_B \in \mathcal{R}(Q)$ für einen beliebigen kompakten Quader $Q \supseteq A \iff$ {Unstetigkeitsstellen von f_B in Q} $=: U_Q$ hat Maß 0. Doch die Unstetigkeitsstellen von f_B liegen gewiss in

$$\underbrace{\{\text{Unstetigkeitsstellen von } f \text{ in } A\}}_{=:U_A} \cup \partial A$$

Da A Jordan-messbar ist, dann hat ∂A nach dem ersten Teil Maß 0. Wenn U_A Maß 0 hat, dann hat auch U_Q Maß 0.

Außerdem gilt: ist f in $x \in A$ unstetig, dann ist auch f_B in $x \in Q$ unstetig. Hat also andererseits U_Q Maß 0, dann muss auch U_A Maß 0 haben.

□

10.3.3 Äußerer und innerer Inhalt

Definition. Für beschränkte $A \subseteq \mathbb{R}^N$ nennt man

$$\sup_Z \sum_{K \in Z, K \subseteq A} v(K) = \sup_Z \sum_{K \in Z} m_K(\chi_A) \cdot v(K) = \underline{\int_A} \chi_B \, \mathrm{d}x =: \underline{v}(A)$$

den **inneren Inhalt von** A. Analog nennt man

$$\inf_Z \sum_{K \in Z, K \cap A \neq \emptyset} v(K) = \overline{\int_A} \chi_A(x) \, \mathrm{d}x =: \overline{v}(A)$$

den **äußeren Inhalt von** A.

Bemerkung. Es ist klar, dass $A \subseteq \mathbb{R}^N$ genau dann Jordan-messbar ist, wenn $\underline{v}(A) = \overline{v}(A)$ ist, was in diesem Fall $= v(A)$ ist.

10.3.4 Nullmengen und Jordan-messbare Mengen mit Inhalt 0

Lemma 10.3.3. Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$ eine beschränkte Menge, dann gilt

$$\boxed{A \text{ ist Jordan'sche Nullmenge} \iff A \text{ ist Jordan-messbar und } v(A) = 0.}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“: Sei A eine Jordan'sche Nullmenge, dann ist auch $\overline{A}$ eine Jordan'sche Nullmenge. Folglich ist auch ∂A eine Jordan'sche Nullmenge, hat also insbesondere N-dimensionales Maß 0. Nach dem vorhergehenden Satz ist A also Jordan-messbar.

Sei nun $\epsilon > 0$ beliebig. Da A eine Jordan-Nullmenge ist, existieren Quader $Q_1, \ldots, Q_m \subseteq \mathbb{R}^N$ mit $A \subseteq \bigcup_{i=1}^m Q_i$ und $\sum_{i=1}^m v(Q_i) < \epsilon$. Sei nun $\tilde{Z}$ eine Zerlegung eines festen Quaders $Q \supseteq A$ mit der Eigenschaft, dass für jeden

Unterquader $\tilde{Q}$ von $\tilde{Z}$ gilt: Wenn $\tilde{Q} \cap A \neq \emptyset$, dann ist schon $\tilde{Q} \subseteq Q_i$ für ein $i \in \{1, \dots, m\}$. Es folgt

$$v(A) = \overline{v}(A) = \inf_Z \sum_{Q \in Z, Q \cap A \neq \emptyset} v(Q) \leq \sum_{\tilde{Q} \in \tilde{Z}, \tilde{Q} \cap A \neq \emptyset} v(\tilde{Q}) \leq \sum_{i=1}^{m} v(Q_i) < \epsilon$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, muss schon $v(A) = 0$.

„$\Leftarrow$": Sei A Jordan-messbar, $\overline{v}(A) = v(A) = 0$, d. h. für einen kompakten Quader $Q \supseteq A$ gilt

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, Z \text{ Zerlegung von } Q : \sum_{Q \in Z, Q \cap A \neq \emptyset} v(Q) < \epsilon$$

Z ist eine endliche Familie von kompakten Quadern $(Q_1, \dots, Q_p)$, die eine Überdeckung von A bilden und für die gilt $\sum_{i=1}^{p} v(Q_i) < \epsilon$. Folglich ist A eine Jordan-Nullmenge. □

Korollar 10.3.4. Seien $A \subseteq \mathbb{R}^N$ eine kompakte, Jordan-messbare Menge und $f : A \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann ist $f \in \mathcal{R}(A)$.

Beweis. Da f auf der kompakten Menge A stetig ist, ist f dort beschränkt. Dann folgt die Behauptung direkt mit Satz 10.3.2. □

10.3.5 Mittelwertsatz für Bereichsintegrale

Satz 10.3.5. Seien A eine beschränkte, Jordan-messbare Teilmenge des $\mathbb{R}^N$, $f \in \mathcal{R}(A)$, dann gilt

$$\underbrace{(\inf f(A))}_{=:m} v(A) \leq \int_A f(x)\, \mathrm{d}x \leq \underbrace{(\sup f(A))}_{=:M} v(A)$$

Beweis. Es ist klar, dass $m \leq f(x) \leq M$ für alle $x \in A$ gilt. Sei nun $Q \supseteq A$ ein kompakter Quader, χ_A die charakteristische Funktion von A in Q, dann gilt

$$m \cdot \chi_A(x) \leq f_A(x) \leq M \cdot \chi_A(x) \quad \forall\, x \in Q$$

Da A Jordan-messbar und $f \in \mathcal{R}(A)$, folgt

$$\int_Q m \cdot \chi_A(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_Q f_A(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_Q M \cdot \chi_A(x)\, \mathrm{d}x \qquad \Rightarrow$$
$$m \cdot v(A) = m \cdot \int_Q \chi_A(x)\, \mathrm{d}x \leq \int_A f(x)\, \mathrm{d}x \leq M \cdot \int_Q \chi_A(x)\, \mathrm{d}x = M \cdot v(A)$$

□

10.3.6 Mengenoperationen auf dem Integrationsbereich

Facts. Seien $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$ beschränkte, Jordan-messbare Mengen. Dann gilt:

1. $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ sind Jordan-messbare Mengen.

2. Sei $f \in \mathcal{R}(A) \cap \mathcal{R}(B)$, dann ist $f \in \mathcal{R}(A \cup B)$ und
$$\int_{A\cup B} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x + \int_B f(x)\,\mathrm{d}x - \int_{A\cap B} f(x)\,\mathrm{d}x$$
3. Insbesondere ist $v(A \cup B) = v(A) + v(B) - v(A \cap B)$. Speziell: wenn A und B sich nicht überlappen, d. h. $A \cap B \subseteq \partial A \cup \partial B$ (also $\mathring{A} \cap \mathring{B} = \emptyset$), dann folgt
$$\int_{A\cup B} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_A f(x)\,\mathrm{d}x + \int_B f(x)\,\mathrm{d}x, \quad v(A\cup B) = v(A) + v(B)$$
4. Ist $A \subseteq B$, dann folgt aus $f \in \mathcal{R}(B)$ auch $f \in \mathcal{R}(A)$
5. Ist A eine Jordan-Nullmenge und $f: A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion, so gilt $f \in \mathcal{R}(A)$ und $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
6. Seien $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$, dann gilt
   i) $x_0 + A = \{x_0 + a \mid a \in A\}$ ist Jordan-messbar mit $v(x_0 + A) = v(A)$. Man sagt, der Jordan-Inhalt ist **translationsinvariant**.
   ii) $r \cdot A = \{r \cdot a \mid a \in A\}$ ist Jordan-messbar mit $v(r \cdot A) = r^N \cdot v(A)$.

Beweis. 2. Dass $f \in \mathcal{R}(B)$ ist, ist nach Satz 10.3.2 klar.

1. Fall: $A \cap B = \emptyset$: Dann ist $f_{A\cup B} = f_A + f_B$, was man leicht mit Hilfe der charakteristischen Funktionen einsieht. Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^N$ ein kompakter Quader mit $A \cup B \subseteq Q$, dann gilt
$$\begin{aligned}\int_A f(x)\,\mathrm{d}x + \int_B f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_Q f_A(x)\,\mathrm{d}x + \int_Q f_B(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_Q f_A(x) + f_B(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_Q f_{A\cup B}(x)\,\mathrm{d}x = \int_{A\cup B} f(x)\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$
2. Fall: $A \cap B \neq \emptyset$: Dann ist zumindest $A \cup B = (A\backslash B)\dot\cup(B\backslash A)\dot\cup(A\cap B)$, und nach Fall 1 gilt
$$\int_{A\cup B} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{A\backslash B} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{B\backslash A} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{A\cap B} f(x)\,\mathrm{d}x$$
Da aber auch $A = (A \setminus B)\dot\cup(A \cap B)$, gilt ebenso
$$\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{A\backslash B} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{A\cap B} f(x)\,\mathrm{d}x$$
(Analoges für B und $\int_B f(x)\,\mathrm{d}x$). In die erste Gleichung eingesetzt ergibt sich die Behauptung.

5. Es ist wieder klar, dass $f \in \mathcal{R}(A)$ ist. Mit dem Mittelwertsatz der Integralrechnung folgt sofort $\int_A f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.
6. Bemerke, dass für einen Quader Q auch $x_0 + Q$ und $r \cdot Q$ Quader im $\mathbb{R}^N$ sind und $v(x_0 + K) = v(K)$ sowie $v(r \cdot Q) = r^N v(Q)$ gilt. Aus Riemann-Summen, die den Inhalt von A approximieren, gewinnt man entsprechende Riemann-Summen, die $v(x_0 + A)$ bzw. $v(r \cdot A)$ approximieren.

□

10.3.7 Vernachlässigbarkeit von Jordan-Nullmengen

Satz 10.3.6. Sei $B \subseteq \mathbb{R}^N$ beschränkt und Jordan-messbar, $f \in \mathcal{R}(B)$. Seien weiter $A \subseteq B$ eine Jordan-Nullmenge, $g : B \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit $g = f$ auf $B \setminus A$. Dann ist schon $g \in \mathcal{R}(B)$ und $\int_B f \, \mathrm{d}x = \int_B g \, \mathrm{d}x$.

Beweis. Da A, B Jordan-messbar sind, ist auch $B \setminus A$ Jordan-messbar. Nun ist $f = g$ auf $B \setminus A$ und $f \in \mathcal{R}(B \setminus A)$, also ist auch $g \in \mathcal{R}(B \setminus A)$. Aber da A eine Nullmenge ist, ist auch $g \in \mathcal{R}(A)$, folglich ist schon $g \in \mathcal{R}((B \setminus A) \cup A) = \mathcal{R}(B)$ und

$$\int_B g \, \mathrm{d}x = \int_{B\setminus A} g \, \mathrm{d}x + \underbrace{\int_A g \, \mathrm{d}x}_{=0} = \int_{B\setminus A} f \, \mathrm{d}x + \underbrace{\int_A f \, \mathrm{d}x}_{=0} = \int_B f \, \mathrm{d}x$$

□

10.3.8 Beispiele für Jordan-Nullmengen

1. Seien $B \subseteq \mathbb{R}^N$ Jordan-messbar, $f : B \to \mathbb{R}$ eine Riemann-integrierbare Funktion, dann ist $\Gamma_f = \{(x, f(x)) \mid x \in B\}$ eine Jordan-Nullmenge.

2. Der Bogen eines rektifizierbaren Weges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$ hat das Maß 0.

10.3.9 Inhalte von Ordinatenmengen

Satz 10.3.7. Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, Jordan-messbare Menge, $f : A \to \mathbb{R}^+$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist die Ordinatenmenge $\mathfrak{M}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in A, 0 \leq y \leq f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Jordan-messbar und $v(\mathfrak{M}(f)) = \int_A f \, \mathrm{d}x$.

Beweis. Da A und f beschränkt sind, ist auch $\mathfrak{M}(f)$ beschränkt. Zu zeigen ist, dass $\mathfrak{M}(f) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ Jordan-messbar ist, also $\partial\mathfrak{M}(f)$ ein Nullmenge ist.

Ein Punkt (x, y) gehört mit Sicherheit zum Inneren von $\mathfrak{M}(f)$, wenn $x \in \mathring{B}$, $0 < y < f(x)$ und f in x stetig ist. $\partial\mathfrak{M}(f)$ ist deshalb gewiss enthalten in der Vereinigung folgender Mengen

$$\begin{aligned}
M &:= \{(x, y) \mid x \in \partial A, 0 \leq y \leq \|f\|_\infty\} \\
N &:= \{(x, 0) \mid x \in A\} \\
O &:= \{(x, f(x)) \mid x \in A\} \\
P &:= \{(x, y) \mid x \in A, f \text{ unstetig in } x, 0 \leq y \leq \|f\|_\infty\}
\end{aligned}$$

Es genügt nun zu zeigen, dass diese Mengen Nullmengen sind.

N ist enthalten in der Hyperebene $H = \big\{(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid x_{n+1} = 0\big\}$. Wie im letzten Abschnitt gezeigt, ist H eine Nullmenge, also ist auch N eine Nullmenge.

O $= \Gamma_f$ ist nach Beispiel 2 aus dem letzten Abschnitt eine Nullmenge.

M : Sei $\epsilon > 0$ beliebig. Da A Jordan-messbar ist, ist ∂B eine Nullmenge. Also existieren N-dimensionale Quader $(Q_i)_{i\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{i\in\mathbb{N}} v(Q_i) < \frac{\epsilon}{\|f\|_\infty}$ und $\partial A \subseteq \bigcup_{i\in I} Q_i$. Also ist

$$M \subseteq \left(\bigcup_{i\in I} Q_i\right) \times [0, \|f\|_\infty] = \bigcup_{i\in I} Q_i \times [0, \|f\|_\infty]$$

und

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} v(Q_i \times [0, \|f\|_\infty]) < \frac{\epsilon}{\|f\|_\infty} \cdot \|f\|_\infty = \epsilon$$

Also ist auch M ein Nullmenge.

P : Folgt analog, denn da $f \in \mathcal{R}(A)$, ist $\{\text{Unstetigkeitsstellen von } f\}$ eine Nullmenge.

Sei nun $Q \supseteq A$ ein kompakter Quader, dann gilt

$$\begin{aligned}
v(\mathfrak{M}(f)) &= \int_{Q\times\left[0,\|f\|_\infty\right]} \chi_{\mathfrak{M}(f)}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \\
&= \int_Q \int_0^{\|f\|_\infty} \chi_{\mathfrak{M}(f)}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_Q \int_0^{f_A(x)} 1\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_Q f_A(x)\,\mathrm{d}x = \int_A f\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

□

Korollar 10.3.8. Seien $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine beschränkte, Jordan-messbare Menge, $f_1, f_2 : A \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktionen, $f_1 \le f_2$ auf A. Dann ist

$$\mathfrak{M}(f_1, f_2) := \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \mid x \in B, f_1(x) \le y \le f_2(x)\right\}$$

Jordan-messbar und $v(\mathfrak{M}(f_1, f_2) = \int_B (f_2 - f_1)\,\mathrm{d}x$.

10.3.10 Satz von Cavalieri

Satz 10.3.9. Sei $M \subseteq \mathbb{R}^N$ eine beschränkte, Jorden-messbare Menge zwischen zwei Hyperebenen, etwa $\{x_1 = a\} := \left\{(x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N \mid x_1 = a\right\}$ und $\{x_1 = b\}$ für $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Für jedes $c \in [a,b]$ besitze $M \cap \{x_1 = c\}$ einen $(N-1)$-dimensionalen Jordan-Inhalt $\nu(c)$. Dann ist $\nu \in \mathcal{R}([a,b])$ und

$$v(M) = \int_a^b \nu(c)\,\mathrm{d}c$$

„Zwei geometrische Körper besitzen das gleiche Volumen, wenn Schnittflächen mit Ebenen, die parallel zu einer Grundebene den gleichen Flächeninhalt besitzen.“

Beweis. folgt aus dem Satz von Fubini: Sei $Q \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$ ein kompakter Quader so, dass $M \subseteq [a,b] \times Q$ ist. Dann gilt

$$\begin{aligned} v(M) &= \int_{[a,b]\times M} \chi_M(x_1,\ldots,x_N)\,\mathrm{d}(x_1,\ldots,x_N) \\ &= \int_a^b \int_Q \chi_M(x_1,\ldots,x_N)\,\mathrm{d}(x_2,\ldots,x_N)\,\mathrm{d}x_1 \\ &= \int_a^b \nu(x_1)\,\mathrm{d}x_1 = \int_a^b \nu(c)\,\mathrm{d}c \end{aligned}$$

□

10.4 Integration über Normalbereiche

10.4.1 Definition

Definition. Unter einen Normalbereich $B \subseteq \mathbb{R}^2$ bezüglich der x-Achse versteht man eine Menge der Form $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, wobei $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind mit $\varphi_1 \leq \varphi_2$.

Analog definiert man Normalbereiche bezüglich der y-Achse.

10.4.2 Integration

Satz 10.4.1. Seien $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein **Normalbereich bezüglich der x-Achse** mit den Bezeichnungen wie oben, $f : B \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt

$$\int_B f\,\mathrm{d}x = \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

Analoges gilt für **Normalbereiche bezüglich der y-Achse**.

Beweis. Da $\partial B \subseteq \{x = a\} \cup \{x = b\} \cup \Gamma_{\varphi_1} \cup \Gamma_{\varphi_2}$ gilt, also ∂B Teilmenge einer endlichen Vereinigung von Nullmengen ist (die ersten beiden sind Hypebenen, die zweiten beiden Graphen von Funktionen), ist es selbst eine Nullmenge. Also ist B Jordan-messbar.

Seien nun $m := \min \varphi_1([a,b])$, $M := \max \varphi_2([a,b])$ und $Q = [a,b] \times [m,M] \supseteq B$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \int_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_Q f_B(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_a^b \left(\int_m^M f_B(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \end{aligned}$$

□

10.4.3 Situation im Dreidimensionalen

Definition. Ein Normalbereich $B \subseteq \mathbb{R}^3$ bezüglich der x-y-Ebene ist eine Menge der Form $B = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in A, \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\right\}$, wobei $A \in \mathbb{R}^2$ eine kompakte, Jordan-messbare Menge ist, $\varphi_1, \varphi_2 A \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen sind mit $\varphi_1 \leq \varphi_2$.

Mit einer analogen Argumentation wie oben folgt, dass B Jordan-messbar ist, und dass für alle stetigen $f : B \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_B f(x, y, z)\,\mathrm{d}(x, y, z) = \int_A \left(\int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\,\mathrm{d}z \right) \mathrm{d}(x, y)$$

10.5 Substitutionsregel für Bereichsintegrale

10.5.1 Motivation

Im Eindimensionalen gilt die Substitutionsregel in der Form

$$\int\limits_{g(a)}^{g(b)} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

für stetig differenzierbares g. Setzt man $U = [a, b]$, $V = g(U)$, dann gilt also umgeschrieben

$$\int_V f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_U f(g(t))g'(t)\,\mathrm{d}t$$

Im mehrdimensionalen Fall untersuchen wir eine Jordan-messbare Menge $B \subseteq \mathbb{R}^N$, eine offene Menge $G \subseteq \mathbb{R}^N$ mit $\overline{B} \subseteq G$ und darauf die stetig differenzierbare Transformationsfunktion $g : G \to \mathbb{R}^M$, die auf B injektiv ist, und für die $\det Dg(x) \neq 0$ für alle $x \in B$ gilt. Sei nun $f : g(B) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.

Sei R das Rechteck wie im Bild; R hat die Fläche $\Delta v_j \cdot \Delta v_k$. Untersuchen wir die Fläche von $\hat{R}$: Unter der Annahme, dass Δv_j und Δv_k hinreichend klein sind, entspricht die Fläche von $\hat{R}$ des zugehörigen Parallelogramms mit der Fläche

$$\begin{aligned}
&\det \begin{pmatrix} \varphi(u_j + \Delta u_j, v_k) - \varphi(uj, v_k) & \varphi(u_j, v_k + \Delta v_k) - \varphi(u_j, v_k) \\ \psi(u_j + \Delta u_j, v_k) - \psi(uj, v_k) & \psi(u_j, v_k + \Delta v_k) - \psi(u_j, v_k) \end{pmatrix} \\
\approx\ &\det \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u_j, v_k) & \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u_j, v_k) \\ \frac{\partial \psi}{\partial u}(u_j, v_k) & \frac{\partial \psi}{\partial v}(u_j, v_k) \end{pmatrix} \cdot \Delta u_j \Delta v_k = \det Dg(u_j, v_k) \cdot \Delta u_j \Delta v_k
\end{aligned}$$

Folglich sollte gelten

$$\int_B f(x, y)\,\mathrm{d}(x, y) \approx \sum_{j,k} f(g(u_j, v_k))\,|\det Dg(u_j, u_k)|\,\Delta u_j \Delta v_k$$

10.5.2 Vorbereitungen

Lemma. todo: Sachen, die wir in der Übung und in den Hausaufgaben gezeigt haben, die im Satz verwendet werden.

10.5.3 Formulierung der Substitutionsregel

Satz 10.5.1 (Transformationsformel)**.** Seien $B \subseteq \mathbb{R}^N$ eine Jordan-messbare Menge, $G \subseteq \mathbb{R}^N$ offen mit $\overline{B} \subseteq G$, $g: G \to \mathbb{R}^N$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g|_B$ injektiv und $\det Dg(x) \neq 0$ für alle $x \in B$. Setze dann $B^* := g(B)$. Dann ist B^* Jordan-messbar und für eine stetige, beschränkte Funktion $f: B^* \to \mathbb{R}$ gilt

$$\int_{B^*} f(x_1^*, \ldots, x_N^*) \, \mathrm{d}(x_1^*, \ldots, x_N^*) = \int_B f(g(x)) \cdot |\det Dg(x)| \, \mathrm{d}x$$

Bemerkung. $\det Dg(x)$ wird auch **Funktionaldeterminante** genannt.

10.5.4 Polar-, Zylinder- und Kugelkoordinaten

Bevor wir zum Beweis kommen, untersuchen wir zunächst die wichtigsten Anwendungen der Transformationsformel.

i) Polarkoordinaten: Hier lautet die Substitutionsfunktion

$$g: \underbrace{\left\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r > 0, 0 < \varphi < 2\pi\right\}}_{=:G} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x, 0) \mid x > 0\}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = g(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cdot \cos \varphi \\ r \cdot \sin \varphi \end{pmatrix}$$

g ist injektiv und stetig differenzierbar mit

$$\det Dg(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r \cos^2 \varphi + r \sin^2 \varphi = r$$

Wenn $B \subseteq G$ eine kompakte, Jordan-messbare Menge ist, dann gilt also

$$\int_{g(B)} f(x, y) \, \mathrm{d}(x, y) = \int_B f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \cdot r \, \mathrm{d}(r, \varphi)$$

für alle stetigen $f: g(B) \to \mathbb{R}$. Durch eine einfach Grenzwertbetrachtung unter Zuhilfnahme des Mittelwertsatzes für Bereichsintegrale sieht man ein, dass diese Formel auch für kompakte Jordan-messbare Mengen

$$B \subseteq \left\{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 \mid r \geq 0, 0 \leq \varphi \leq 2\pi\right\}$$

gilt. Betrachten wir beispielsweise

$$g: [a, b] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2$$
$$(r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}$$

g ist injektiv und stetig differenzierbar (im Inneren des Definitionsbereichs). Wie im Satz sei $B^* = g([a,b] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right])$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
\int_{B^*} \ln(x^2+y^2)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_{[a,b]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]} \ln(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi) r\,\mathrm{d}(r,\varphi) \\
&= \int\limits_a^b \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(r^2) r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{2}\int\limits_a^b \ln(r^2) r\,\mathrm{d}r \\
&= \frac{\pi}{4}\int\limits_{r=a}^{r=b} \ln t\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4}\left[t\,(\ln t - 1)\right]_{r=a}^{r=b} \\
&= \ldots = \frac{\pi}{4}\left(b^2\left(\ln(b^2)-1\right) - a^2\left(\ln(a^2)-1\right)\right)
\end{aligned}$$

ii) Zylinderkoordinaten: Dabei substituiert man

$$g:\ \left\{(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^3 \mid r>0, 0<\varphi<2\pi, z\in\mathbb{R}\right\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0,z) \mid x>0, z\in\mathbb{R}\}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cdot\cos\varphi \\ r\cdot\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}$$

Wie im letzten Punkt bemerkt ist die Restriktion auf die angegebene offene Menge in der Praxis nicht nötig. Für jedes kompakte und Jordan-messbare $B \subseteq \left\{(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^3 \mid r\geq 0, 0\leq\varphi\leq 2\pi, z\in\mathbb{R}\right\}$ gilt

$$\int_{g(B)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_B f(r\cos\varphi, r\sin\varphi, z) r\,\mathrm{d}(r,\varphi,z)$$

für jedes stetige $f:\ g(B)\to\mathbb{R}$.

iii) Kugelkoordinaten: Hier gibt es zwei Konventionen. Zählt man θ wie im Bild angedeutet von der z-Achse aus, dann erhält man die Transformation

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = g(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} r\cdot\sin\theta\cos\varphi \\ r\cdot\sin\theta\sin\varphi \\ r\cdot\cos\theta \end{pmatrix}$$

Die Transformation ist für alle kompakten, Jordan-messbaren Mengen $B \subseteq \left\{(r,\theta,\varphi)\in\mathbb{R}^3 \mid r\geq 0, 0\leq\theta\leq\pi, 0\leq\varphi\leq 2\pi\right\}$ möglich, wobei hier die Funktionaldeterminante lautet: $\det Dg(x) = r^2\sin\theta$.

10.5.5 Beweis der Substitutionsregel

Wir führen den Beweis in drei Schritten:

1. Wenn die Regel für alle kompakten Quader $\subseteq \mathring{B}$ gilt, so gilt ihre Aussage auch für alle Jordan-messbaren Mengen.
2. Die Substitutionsregel gilt für kompakte Quader $Q\subseteq B$ und $g:\ Q\to\mathbb{R}^N$ von der Form

$$g(x) = (x_1,\ldots,x_{i-1},g_i(x),x_{i+1},\ldots,x_N)^T$$

   für beliebiges $i\in\{1,\ldots,N\}$. Nach dem 1. Schritt kann die Einschränkung auf kompakte Quader im Weiteren fallengelassen werden.
3. Sie gilt für alle kompakten Quader $Q\subseteq\mathring{B}$ und beliebige g aus dem Satz.

1. Da B Jordan-messbar ist, ist ∂B eine Jordan-Nullmenge und damit ist auch $\partial(g(B)) = g(\partial B)$ (siehe vorhergendes Lemma) eine Jordan-Nullmenge. Somit reicht es, die Substitutionsregel für $\mathring{B}$ zu zeigen, d. h. o. B. d. A. darf man annehmen, dass B bereits offen ist (und dann ist auch $g(B)$ offen (siehe Lemma)).

Sei nun $\epsilon > 0$ gegeben. Dann existiert eine kompakte, Jordan-messbare Menge $K^* \subseteq B^* = g(B)$ so, dass $v(B^*) - v(K^*) < \epsilon$ (man erhält sie zum Beispiel aus der Supremumsbildung in der Definition des inneren Inhalts, da $g(B)$ Jordan-messbar ist).

Sei $K = g^{-1}(K^*)(\subseteq B)$. Klar ist: K ist kompakt und $\delta := \operatorname{dist}(K, \partial B) > 0$ (anderenfalls fände man eine Folge in K, die gegen einen Randpunkt von B konvergiert; dieser ist aber nicht in B, also auch nicht in K enthalten, was der Abgeschlossenheit von K widerspricht). Betrachte nun einen kompakten Quader $A \supseteq B$ und wähle eine Zerlegung Z von A so, dass gilt:

- Die Summe der Volumina der Unterquader von Z, die ∂B schneiden, etwa $S_1, \ldots, S_m$, ist $< \epsilon$. Dies ist möglich, da ∂B eine Nullmenge ist.
- $\operatorname{diam}(S) < \delta$ für alle Unterquader S von Z.

Nun gilt: die restlichen Unterquader von Z, die in B liegen, etwa $K_1, \ldots, K_p$, überdecken die Menge K. Folglich ist

$$v(B) - v(\underbrace{\bigcup_{i=1}^{p} K_i}_{=:\tilde{K}}) \leq v\left(\bigcup_{i=1}^{m} S_i\right) < \epsilon$$

und wegen $K^* = g(K) \subseteq g(\tilde{K}) \subseteq B^*$ gilt nach der Wahl von K^*

$$v(B^*) - v(g(\tilde{K})) \leq v(B^*) - v(K^*) < \epsilon$$

Da $(f \circ g) \cdot |\det Dg|$ auf $\overline{B}$ und f auf $\overline{B^*}$ stetig sind, sind die beiden Funktionen dort insbesondere beschränkt, etwa dem Betrage nach durch $M \in \mathbb{R}^+$. Damit gilt

$$\begin{aligned}
&\left| \int_B f(g(x))\, |\det Dg(x)| \,\mathrm{d}x - \int_{\tilde{K}} f(g(x))\, |\det Dg(x)| \,\mathrm{d}x \right| \\
&= \left| \int_{B \setminus \tilde{K}} f(g(x))\, |\det Dg(x)| \,\mathrm{d}x \right| \\
&\leq M \cdot v(B \setminus \tilde{K}) = M \cdot \Big(v(B) - v(\tilde{K})\Big) < M \cdot \epsilon
\end{aligned}$$

Analog gilt

$$\begin{aligned}
\left| \int_{g(B)} f(x^*) \,\mathrm{d}x^* - \int_{g(\tilde{K})} f(x^*) \,\mathrm{d}x^* \right| &= \left| \int_{g(B) \setminus g(\tilde{K})} f(x^*) \,\mathrm{d}x^* \right| \\
&\leq M \cdot v(g(B) \setminus \tilde{K}) < M \cdot \epsilon
\end{aligned}$$

Schließlich folgt einfach mit der Dreiecksungleichung

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{B^*} f(x^*)\,\mathrm{d}x^* - \int_B f(g(x))\,|\det Dg(x)|\,\mathrm{d}x\right| \\
&\leq \left|\int_{g(B)} f(x^*)\,\mathrm{d}x^* - \int_{g(\tilde{K})} f(x^*)\,\mathrm{d}x^*\right| \\
&\quad + \underbrace{\left|\int_{g(\tilde{K})} f(x^*)\,\mathrm{d}x^* - \int_{\tilde{K}} f(g(x))\,|\det Dg(x)|\,\mathrm{d}x\right|}_{=0 \text{ nach Annahme}} \\
&\quad + \left|\int_{\tilde{K}} f(g(x))\,|\det Dg(x)|\,\mathrm{d}x - \int_B f(g(x))\,|\det Dg(x)|\,\mathrm{d}x\right| \\
&< 2M\epsilon
\end{aligned}$$

Dabei ist der mittlere Term tatsächlich $= 0$, denn nach Annahme ist er es auf jedem Quader, und da die Quader, aus denen $\tilde{K}$ besteht, sich nicht überlappen, kann man das Integral über $\tilde{K}$ in die endliche Summe über die Integrale über die K_i aufspalten. Spaltet man ebenso das Integral über $g(\tilde{K})$ in Integrale über die Mengen $g(\tilde{K_i})$ auf (was wegen der Injektivität von g möglich ist), so heben sich alles weg.

2. Alle Koordinaten sind gleichberechtigt, weshalb wir uns hier aus Gründen der besseren Lesbarkeit auf den Spezialfall $i = N$ beschränken. Man prüfe in jedem Schritt nach, dass er ebenso mit jedem beliebigen $i \in \{1, \ldots, N\}$ durchgeführt werden kann. Damit ist

$$g(x_1, \ldots, x_N) = (x_1, \ldots, x_{N-1}, g_N(x_1, \ldots, x_N))^T,$$

also $\det Dg(x) = \frac{\partial g_N}{\partial x_N}(x)$.

Sei nun $[a_1, b_1] \times \ldots \times [a_N, b_N] = Q \subseteq B$ ein kompakter Quader, dann gilt

$$\begin{aligned}
&\int_{[a_1,b_1]\times\ldots\times[a_N,b_N]} f(g(x))\,|\det Dg(x)|\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{a_1}^{b_1} \left(\ldots \left(\int_{a_N}^{b_N} f(x_1, \ldots, x_{N-1}, g_N(x)) \left|\frac{\partial g_i}{\partial x_i}(x)\right| \mathrm{d}x_N\right) \ldots\right) \mathrm{d}x_1
\end{aligned}$$

Nach der gewöhnlichen Substitutionsregel folgt nun mit $x_N^* = g_N(x)$

$$\begin{aligned}
\ldots &= \int_{a_1}^{b_1} \left(\ldots \left(\int_{g([a_N,b_N])} f(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N^*)\,\mathrm{d}x_N^*\right) \ldots\right) \mathrm{d}x_1 \\
&= \int_{[a_1,b_1]\times\ldots\times g([a_N,b_N])} f(x_1, \ldots, x_{N-1}, x_N^*)\,\mathrm{d}(x_1, \ldots, x_N^*) \\
&= \int_{g(Q)} f(x^*)\,\mathrm{d}x^*
\end{aligned}$$

3. Wir zeigen diesen Punkt per vollständiger Induktion über N. Sei $Q \subseteq \mathring{B}$ ein kompakter Quader.

$N = 1$: Das ist die eindimensionale Substitutionsregel aus Analysis II.

$N-1 \to N$: Es reicht zu zeigen, dass für alle $x_0 \in Q$ ein offener Quader $K(x_0)$ existiert mit $\overline{K(x_0)} \subseteq \mathring{B}$ so, dass die Substitutionsregel für alle kompakten Quader $\subseteq K(x_0)$ gilt. In der Tat ist in diesem Fall $Q \subseteq \bigcup_{x \in Q} K(x_0)$; da Q kompakt ist, reichen in der Vereinigung sogar endlich viele $x_1, \dots, x_n \in Q$ aus, sodass $Q \subseteq \bigcup_{i=1}^n K(x_i)$ gilt. Sei dann Z eine Zerlegung von Q so, dass jeder Unterquader von Z vollständig in mindestens einem der $\overline{K(x_i)}$ liegt. Dann gilt die Substitutionsregel folglich für jeden Unterquader von Z. Durch Aufsummieren über alle Unterquader erhält man die Regel für ganz Q.

Sei also $x_0 \in Q$. Gesucht ist eine Umgebung $U(x_0) \subseteq \mathring{B}$ so, dass die Substitutionsregel für alle kompakten Quader $L \subseteq U(x_0)$ gilt (jede Umgebung enthält eine quaderförmige Umgebung). Nach Voraussetzung an g hat die Matrix

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{N-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{N-1}}{\partial x_N} \end{pmatrix}$$

in B Rang $N-1$, d. h. sie besitzt eine $(N-1)$-reihige Untermatrix mit Determinante ungleich Null, die man etwa durch Streichen der j-ten Spalte erhält. O. B. d. A. können wir zur Vereinfachung der Notation annehmen, dass $j = N$ gilt (ansonsten sortiert man die Koordinaten um). Also gilt

$$\operatorname{rang} \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_{N-1}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_{N-1}}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_{N-1}}{\partial x_{N-1}} \end{pmatrix} = N-1$$

Nach dem Umkehrsatz (aus Analysis II, Satz 7.5.3) existiert eine Umgebung $U(x_0)$ so, dass $U(x_0)$ durch die Abbildung

$$\begin{aligned} \psi :\, U(x_0) &\to \mathbb{R}^N \\ x = (x_1, \dots, x_N) &\mapsto (g_1(x), \dots, g_{N-1}(x), x_N)^T \end{aligned}$$

bijektiv auf ein Gebiet $U_0 \subseteq \mathbb{R}^N$ abgebildet wird, und die Umkehrabbildung $h = \psi^{-1} : U_0 \to U(x_0)$ stetig differenzierbar ist. Folglich ist auch

$$\begin{aligned} g^* :\, U_0 &\to \mathbb{R}^N \\ y &\mapsto (y_1, \dots, y_{N-1}, g_N(h_1(y), \dots, h_{N-1}(y), y_N))^T \end{aligned}$$

stetig differenzierbar, und erfüllt die Voraussetzungen des 2. Schrittes. Beachte, dass

$$g^*(\psi(x)) = (g_1(x), \dots, g_{N-1}(x), g_N(\underbrace{h_1(\psi(x))}_{=x_1}, \dots, \underbrace{h_{N_1}(\psi(x))}_{=x_{N-1}}, x_N))^T,$$

also $g^*(\psi(x)) = g(x)$ gilt.

Sei nun $L = \prod_{i=1}^N [a_i, b_i]$ ein beliebiger Quader $\subseteq U(x_0)$. Wähle $x_N \in [a_N, b_N]$ beliebig, aber fest. Für dieses x_N sei $S(x_N) \subseteq \mathbb{R}^{N-1}$ das Bild von

$\prod_{i=1}^{N-1}[a_i,b_i]$ unter der Abbildung $(g_1,\dots,g_{N-1})$. Nach Induktionsvoraussetzung ist dann für $y_N = x_N$ (fest)

$$\int_{S(y_N)} f(g^*(y_1,\dots,y_{N-1},y_N))\,|\det Dg^*(y_1,\dots,y_N)|\,\mathrm{d}(y_1,\dots,y_{N-1})$$
$$= \int_{\prod\limits_{i=1}^{N-1}[a_i,b_i]} f(g^*(\psi(x_1,\dots,x_N)))\,|\det Dg^*(\psi(x_1,\dots,x_N))|\,|\det D\psi(x_1,\dots,x_N)|\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_{N-1})$$

wobei wir $(y_1,\dots,y_{N-1}) = (g_1,\dots,g_{N-1}) = (\psi_1,\dots,\psi_{N-1})$ substituiert haben. Nach der Bemerkung $g^*(\psi(x)) = g(x)$ sowie dem Determinantenmultiplikationssatz und der Kettenregel folgt nun

$$\dots = \int_{\prod\limits_{i=1}^{N-1}[a_i,b_i]} f(g(x_1,\dots,x_N))\,|\det D(g^*\circ\psi)(x_1,\dots,x_N)|\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_{N-1})$$

Nun ist

$$\psi\left(\prod_{i=1}^{N}[a_i,b_i]\right) = \bigcup_{y_N\in[a_N,b_N]} S(y_N)\times[a_N,b_N] = \left(\bigcup_{y_N\in[a_N,b_N]} S(y_N)\right)\times[a_N,b_N]$$

und mit dem Satz von Fubini erhält man

$$\int_{\Psi(\prod_{i=1}^{N}[a_i,b_i])} f(g^*(y_1,\dots,y_N))\,|\det Dg^*(y_1,\dots,y_N)|\,\mathrm{d}(y_1,\dots,y_N)$$
$$= \int_{a_N}^{b_N}\left(\int_{S(y_N)} f(g^*(y_1,\dots,y_N))\,|\det Dg^*(y_1,\dots,y_N)|\,\mathrm{d}(y_1,\dots,y_{N-1})\right)\mathrm{d}y_N$$
$$= \int_{a_N}^{b_N}\left(\int_{\prod\limits_{i=1}^{N-1}[a_i,b_i]} f(g(x))\,|\det D(g^*\circ\psi)(x)|\,\mathrm{d}(x_1,\dots,x_{N-1})\right)\mathrm{d}x_N$$
$$= \int_L f(g(x))\,|\det Dg(x)|\,\mathrm{d}x$$

Wie schon bemerkt, ist auf g^* der 2. Schritt anwendbar:

$$\begin{aligned}\int_L f(g(x))\,|\det Dg(x)|\,\mathrm{d}x &= \int_{\Psi(\prod_{i=1}^{N}[a_i,b_i])} f(g^*(y))\,|\det Dg^*(y)|\,\mathrm{d}y\\ &\overset{1.}{=} \int_{g^*(\Psi(\prod_{i=1}^{N}[a_i,b_i]))} f(x^*)\,\mathrm{d}x^*\\ &= \int_{g(L)} f(x^*)\,\mathrm{d}x^*\end{aligned}$$

10.6 Integralsätze: Satz von Gauß-Green

10.6.1 Motivation

Im Eindimensionalen gilt bekanntermaßen für stetig differenzierbare Funktionen $F:\,[a,b]\to\mathbb{R}$

$$\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

Kann man dies auf höhere Dimensionen verallgemeinern?

Kann man also zum Beispiel im Falle $N = 2$ für $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine Jordan-messbare Menge ein Bereichsintegral $\int_B \dots \mathrm{d}x$ über ein Randintegral $\int_{\partial B} \dots \mathrm{d}x$ ausdrücken?

10.6.2 Bezeichnungen

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^N$ ein rektifizierbarer Weg mit Bogen Γ, $F : \Gamma \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann setzen wir für $k = 1, \dots, N$

$$\int_\gamma F \,\mathrm{d}x_k := \int_a^b F(\gamma(t)) \,\mathrm{d}\gamma_k(t)$$

wobei die rechte Seite ein wohldefiniertes Riemann-Stieltjes-Integral ist.

Wenn γ stetig differenzierbar ist, dann gilt in dieser Notation

$$\int_\gamma F \,\mathrm{d}x_k = \int_a^b F(\gamma(t))\dot{\gamma_k}(t) \,\mathrm{d}t$$

Ist nun $F : \Gamma \to \mathbb{R}^N$ ein stetige Vektorfeld, so kann man schreiben

$$\begin{aligned}\int_\gamma F \,\mathrm{d}x &:= \sum_{k=1}^N \int_a^b F_k(\gamma(t)) \,\mathrm{d}\gamma_k(t) \\ &= \sum_{k=1}^N \int_\gamma F_k \,\mathrm{d}x_k = \int_\gamma F_1 \,\mathrm{d}x_1 + \ldots + F_N \,\mathrm{d}x_N\end{aligned}$$

Ein Normalbereich $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \le x \le b, \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}$ bezüglich der x-Achse nennt man **BV-Normalbereich** bezüglich der x-Achse, wenn $\varphi_1, \varphi_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ nicht nur stetig, sondern auch von beschränkter Variation sind. Analog sind BV-Normalbereiche bezüglich der y-Achse erklärt.

10.6.3 Formulierung des Satzes mit partiellen Ableitungen

Satz 10.6.1 (Gauß-Green)**.** Seien $B \subseteq \mathbb{R}^2$ ein BV-Normalbereich bezüglich der x- und der y-Achse, ∂B positiv (d. h. entgegen dem Uhrzeigersinn) orientiert, $G \supseteq B$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$, $P, Q : G \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit stetigen partiellen Ableitungen $\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial x}$ auf G. Dann gilt

$$\int_B \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}(x, y) = \int_{\partial B} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y$$

Insbesondere gilt

$$v(B) = \int_B 1 \,\mathrm{d}(x, y) = \frac{1}{2} \int_B \underbrace{1}_{=\frac{\partial Q}{\partial x}} - \underbrace{(-1)}_{=\frac{\partial P}{\partial y}} \mathrm{d}(x, y) = \int_{\partial B} -y \,\mathrm{d}x + x \,\mathrm{d}y$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist B ein BV-Normalbereich bezüglich der $x-$ *Achse*, d. h. von der Form $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, wobei $\varphi_1, \varphi_2 : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen von beschränkter Variation sind. Damit besteht ∂B aus den folgenden vier Wegen

- $\gamma_1(t) = (t, \varphi_1(t))^T$, $t \in [a,b]$,
- $\gamma_2(t) = (b, \varphi_1(b) + t(\varphi_2(b) - \varphi_1(b)))^T$, $t \in [0,1]$,
- $\gamma_3^-(t) = (t, \varphi_2(t))^T$, $t \in [a,b]$ und
- $\gamma_4^-(t) = (a, \varphi_1(a) + t(\varphi_2(t) - \varphi_1(t)))^T$, $t \in [0,1]$.

Damit ist

$$\begin{aligned}
\int_B \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}(x,y) &= \int_a^b \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b (P(x,\varphi_2(x)) - P(x,\varphi_1(x)))\,\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b P(\underbrace{x,\varphi_2(x)}_{=\gamma_3^-(x)})\,\mathrm{d}x - \int_a^b P(\underbrace{x,\varphi_1(x)}_{=\gamma_1(x)})\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_a^b P(\gamma_3(x)) \cdot 1\,\mathrm{d}x - \int_a^b P(\gamma_1(x)) \cdot 1\,\mathrm{d}x \\
&= -\int_{\gamma_3} P\,\mathrm{d}x - \int_{\gamma_1} P\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Wegen $a, b = \text{const}$ und nach Konvention gilt

$$\int_{\gamma_2} P\,\mathrm{d}x = \int_0^1 P(\gamma_2(t))\,\mathrm{d}b = 0 = \int_0^1 P(\gamma_4^-(t))\,\mathrm{d}a = \int_{\gamma_4^-} P\,\mathrm{d}x$$

Also hat man

$$\int_B \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}(x,y) = -\int_{\gamma_1} P\,\mathrm{d}x - \int_{\gamma_2} P\,\mathrm{d}x - \int_{\gamma_3} P\,\mathrm{d}x - \int_{\gamma_4} P\,\mathrm{d}x = -\int_{\partial B} P\,\mathrm{d}x$$

Analog zeigt man

$$\int_B \frac{\partial Q}{\partial x}\,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\partial B} Q\,\mathrm{d}y$$

indem man ausnutzt, dass B auch ein BV-Normalbereich bezüglich der y-Achse ist, d. h. geschrieben werden kann als

$$B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, \psi_1(y) \leq x \leq \psi(y)\}$$

mit$\psi_1, \psi_2 : [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig und von beschränkter Variation. $\square$

10.6.4 Gültige Integrationsbereiche

Beispiele für gültige Integrationsbereiche sind Rechtecke, Kreise, aber auch etwa der Bereich

dessen obere Hälfte definiert ist durch $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \leq a^{\frac{2}{3}}$, $a \geq 0$, kann erfasst werden: man zerlegt B wie im Bild angedeutet in 4 Bereiche $B_1, \ldots, B_4$, wobei zum Beispiel

$$B_1 = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a, -(a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{2}} \leq y \leq 0\right\}$$

ist (analoges für B_2, B_3, B_4). Dies sind BV-Normalbereiche bezüglich beider Achsen und nach dem Satz von Gauß-Green erhält man

$$\int_{B_i} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}(x, y) = \int_{\partial B_i} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y \quad \forall\, i = 1, \ldots, 4 \qquad \Rightarrow$$

$$\int_{B} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}(x, y) = \sum_{i=1}^{4} \int_{\partial B_i} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = \int_{\partial B} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y$$

da sich Wegintegrale über die Ränder und der x- bzw. y-Achse wegheben, denn sie werden in den einzelnen Berechnungen jeweils in unterschiedlichen Richtungen durchlaufen.

Das obige Beispiel zeigt, dass der Satz von Gauß-Green für viel allgemeinere Bereiche als BV-Normalbereiche bezüglich beider Achsen gilt. Es reicht aus, wenn der Bereich B in BV-Normalbereiche bezüglich beider Achsen zerlegt werden kann.

Bemerkung. Der Satz von Gauß-Green gilt tatsächlich schon, wenn $B \subseteq \mathbb{R}^2$ beschränkt und ∂B eine rektifizierbarer Jordankurve mit positiver Orientierung ist (d. h. es soll gelten: $\frac{1}{2} \int\limits_{\partial B} x \,\mathrm{d}y - y \,\mathrm{d}x \geq 0$).

10.6.5 Formulierung des Satzes mit äußerem Normalenvektor

$$\int_{B} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}(x, y) = \int_{\partial B} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y$$

kann auch anders formuliert werden. Zur Erinnerung: Ist $G \subseteq \mathbb{R}^N$ eine offene Menge, $F : G \to \mathbb{R}^N$ ein differenzierbares Vektorfeld ist, dann ist die Divergenz von F definiert als

$$\mathrm{div} F(x_1, \ldots, x_N) = \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial F_i}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_N),$$

d. h. es ist

$$\int_{B} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}(x, y) = \int_{B} \mathrm{div}\,(Q, -P)^T \,\mathrm{d}(x, y)$$

Weiter gilt

$$\int_{\partial B} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y = \int_{\partial B} \left\langle \begin{pmatrix} Q \\ -P \end{pmatrix}, n \right\rangle \mathrm{d}s,$$

wobei n der äußere Normaleneinheitsvektor ist, den wir gleich definieren werden. Damit kann man den Satz von Gauß-Green in der Form

$$\int_B \operatorname{div} F \,\mathrm{d}(x,y) = \int_{\partial B} F \cdot n \,\mathrm{d}s$$

geschrieben werden, wobei $F : G \to \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld sei, $G \supseteq B$ offen.

Betrachten wir im Weiteren nur den Fall, dass B ein **C^1-Normalbereich** bezüglich beider Achsen ist, d. h. die Funktionen φ_1, φ_2 bzw. ψ_1, ψ_2 aus dem Beweis oben seien stetig differenzierbar.

Zu jedem der vier Wege γ_i definiert man den **Tangentialvektor** τ_i durch $\tau_i(t) = \dot{\gamma_i}(t)$. Für $\gamma_1(t) = (t, \varphi_1(t))^T$, $t \in [a,b]$ hat man

$$\tau_1(t) = \dot{\gamma_1}(t) = (1, \varphi_1'(t))^T$$

Darauf senkrecht steht der **äußere Normaleneinheitsvektor** η_i. Für γ_1 ergibt sich $\eta_1(t) = (-\varphi_1'(t), 1)^T \cdot \|\dot{\gamma_1}(t)\|^{-1}$. Entsprechend ist $\eta_3(t) = (-\varphi_2'(t), 1) \cdot \|\dot{\gamma_3}(t)\|^{-1}$. Damit ergibt sich

$$\int_{\partial B} \begin{pmatrix} Q \\ -P \end{pmatrix} \cdot \eta \,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_1} \begin{pmatrix} Q \\ -P \end{pmatrix} \cdot \eta \,\mathrm{d}s + \ldots + \int_{\gamma_4^-} \begin{pmatrix} Q \\ -P \end{pmatrix} \cdot \eta \,\mathrm{d}s$$

wobei

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_1} \begin{pmatrix} Q \\ -P \end{pmatrix} \cdot \eta \,\mathrm{d}s &= \int\limits_a^b \left(Q(\gamma_1(t)) \frac{\varphi_1'(t)}{\|\dot{\gamma_1}(t)\|} - P(\gamma_1(t)) \frac{-1}{\|\dot{\gamma_1}(t)\|} \right) \cdot \|\dot{\gamma_1}(t)\| \,\mathrm{d}t \\ &= \int_{\gamma_1} Q \,\mathrm{d}y + \int_{\gamma_1} P \,\mathrm{d}x \end{aligned}$$

Analog rechnet man das für $\gamma_2, \gamma_3^-, \gamma_4^-$ nach.

10.6.6 Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen

Es stellt sich natürlich die Frage, ob ein analoges Resultat auch für $N \geq 3$ gilt, speziell etwa im $\mathbb{R}^3$:

Ist für eine Jordan-messbare Menge $B \subseteq \mathbb{R}^3$ und eine stetig differenzierbare Funktion $F : B \to \mathbb{R}^3$

$$\int\limits_B \operatorname{div} F \,\mathrm{d}x = „\int_{\partial B} F \cdot n \,\mathrm{d}\sigma“,$$

wobei rechts ein noch zu definierendes Oberflächenintegral steht?

10.7 Flächen und Oberflächenintegrale im $\mathbb{R}^3$

Definition 10.7.1. Seien $\emptyset \neq K \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte, Jordan-messbare Menge, $D \supseteq K$ eine offene Menge. Die Einschränkung $\Phi|_K$ einer C^1-Abbildung $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ auf K heißt **parametrisierte C^1-Fläche mit Parameterbereich** K (im Folgenden kurz „Fläche“ genannt), $S = \Phi(K)$ heißt **Flächenstück mit Parameterdarstellung Φ und Parameterbereich** K.

Man beachte hier die Parallelen zur Definition von Wegen und dem Bogen eines Weges.

Bemerkung. 1. Es ist ebenso möglich, „p-Flächen" im $\mathbb{R}^q$, für $p, q \in \mathbb{N}$, $p \leq q$, mittels Abbildungen $\Phi : K \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^q$ zu definieren. Dies wird im Folgenden nicht betrachtet.

2. Obige Definition schließt auch „entartete" Flächen wie Punkte im $\mathbb{R}^3$ (wenn Φ konstant ist) und Wege/Kurven mit ein. Im Folgenden werden wir uns mit „2-dimensionalen" geometrischen Flächen beschäftigen, d. h. mit Flächen Φ, für die auf K oder zumindest auf $\mathring{K}$ gilt: $\operatorname{rang}(D\Phi) = 2$.

10.7.1 Beispiele

1. Die Oberfläche eines Torus kann durch die stetig differenzierbare Funktion

$$\begin{aligned}\Phi :\ & \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3 \\ & (u, v) \mapsto ((R + r \sin u) \cos v, (R + r \sin u) \sin v, r \cos u)^T\end{aligned}$$

parametrisiert werden. Konkret ist $T = \Phi(K)$ mit $K = [0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$. Es gilt

$$D\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} r \cos u \cos v & -(R + r \sin u) \sin v \\ r \cos u \sin v & (R + r \sin u) \cos v \\ -r \sin u & 0 \end{pmatrix} \quad \text{hat Rang 2}$$

2. Häufig sind Flächen $\subseteq \mathbb{R}^3$ von der Gestalt $z = f(x, y)$. Das Flächenstück S ist also der Graph einer C^1-Abbildung $f : D \to \mathbb{R}$ über einer Menge kompakten, Jordan-messbaren Menge K, wobei $D \supseteq K$ eine offene Menge $\subseteq \mathbb{R}^3$ sei. Dann ist

$$\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v)) = u \cdot \vec{i} + v \cdot \vec{j} + f(u, v) \cdot \vec{k}$$

bzw. $\Phi|_K$ die C^1-Parametrisierung der Fläche S und

$$D\Phi(u, v) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} \end{pmatrix} \quad \text{hat Rang 2} \quad \forall\, (u, v) \in K$$

10.7.2 Motivation der Flächeninhaltsberechnung

Bemerkung. Die Bedingung, dass $\operatorname{rang}(D\Phi) = 2$ ist, bedeutet, dass $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v)$ in jedem Punkt $(u, v) \in K$ linear unabhängig sind und in jedem Punkt (u, v) eine Ebene im $\mathbb{R}^2$ aufspannt, die sogenannte **Tangentialebene** an der Fläche $S = \Phi(K)$ im Punkt $\Phi(u, v)$.

Betrachten wir wie im Bild einen festen Punkt (u_0, v_0). Es sind zwei Kurven gegeben durch $u \mapsto \Phi(u, v_0)$ und $v \mapsto \Phi(u_0, v)$. $\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0)$ ist der Tangentialvektor im Punkt $\Phi(u_0, v_0)$ an der ersten Kurve, $\frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)$ der an der zweiten.

Für $\Delta u, \Delta v > 0$ hinreichend klein, sollte das durch die Vektoren $\Delta u \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0)$ und $\Delta \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0)$ aufgespannte Parallelogramm eine gute Approximation an das gekrümmte Oberflächenstück der Oberfläche $S = \Phi(K)$ über dem Rechteck $[u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v]$ sein.

Wir erinnern uns an die Definition des Vektorprodukts im $\mathbb{R}^3$ aus der linearen Algebra:

Für $a = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ definiert man

$$a \times b := \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix}$$

Es gilt $(a \times b) \cdot a = 0 = (a \times b) \cdot b$, d. h. $a \times b$ steht senkrecht auf a, b. Weiter ist $\|a \times b\|_2$ der Flächeninhalt des von den Vektoren a, b aufgespannten Parallelogramms.

Somit gilt: Bei nicht-entarteter Fläche Φ steht

$$N_\Phi(u_0, v_0) := \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0), \quad (u_0, v_0) \in K$$

senkrecht zur Tangentialebene an der Fläche $\Phi(K)$ im Punkt $\Phi(u_0, v_0)$. $N_\Phi(u, v)$ heißt **Normalenvektor** an der Fläche im Punkt $\Phi(u_0, v_0)$.

$$n_\Phi(u_0, v_0) = \frac{N_\Phi(u_0, v_0)}{\|N_\Phi(u_0, v_0)\|}$$

heißt **Normaleneinheitsvektor** an der Fläche $\Phi(K)$ im Punkt (u_0, v_0).

Weiter sollte

$$\left\| \left(\Delta u \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) \right) \times \left(\Delta v \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) \right) \right\| = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_0, v_0) \right\| \Delta u \Delta v$$

für hinreichend kleine $\Delta u, \Delta v > 0$ den Flächeninhalt des Flächenstücks der Fläche Φ über dem Rechteck $[u_0, u_0 + \Delta u] \times [v_0, v_0 + \Delta v]$ annähern. In natürlicher Weise kann man so den Flächeninhalt der gesamten Fläche $\Phi|_K$ approximieren.

Betrachten wir den Fall $K = [a, b] \times [c, d]$. Wir wählen eine Zerlegung Z von K:

$$Z = (\{a = u_0 < \ldots < u_n = b\}, \{c = v_0 < \ldots < v_m = d\})$$

Der gesuchte Flächeninhalt von $\Phi|_K$ sollte annähernd gegeben sein durch

$$\sum_{i,j} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_i, v_j) \right\| (u_i - u_{i-1})(v_i - v_{i-1})$$

Geht man zum Grenzwert für $n, m \to \infty$, d. h. $|Z| \to 0$ über, so strebt die Summe gegen

$$\int_a^b \int_c^d \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right\|_2 \mathrm{d}u \, \mathrm{d}v = \int_K \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_2 \mathrm{d}(u, v)$$

da wir den Integranden $(u, v) \mapsto \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right\|_2$ als stetig vorausgesetzt haben.

10.7.3 Inhalt von Flächen

Diese Überlegungen motivieren

Definition 10.7.2. Sei Φ eine Fläche über der kompakten, Jordan-messbaren Menge $K \subseteq \mathbb{R}^2$ (im Sinne der obigen Definition 10.7.1). Dann heißt

$$I(\Phi) = \int_K \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_2 \mathrm{d}(u, v)$$

Inhalt der Fläche Φ über dem Parameterbereich K.

10.7.4 Beispiel

1. Sei die Fläche wie im 2. Beispiel oben „gegeben" durch $z = f(x, y)$. Dann:

$$\begin{aligned} I(\Phi) &= \int_K \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{pmatrix} \right\|_2 \mathrm{d}(u, v) \\ &= \int_K \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial u}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}(u, v)\right)^2 + 1}\, \mathrm{d}(u, v) \end{aligned}$$

2. Die Mantelfläche M eines Zylinders mit Radius r, Höhe h wird durch

$$\Phi : \underbrace{[0, 2\pi] \times [0, h]}_{=:K} \to \mathbb{R},$$

$$\Phi(\varphi, z) := \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$$

parametrisiert: Φ ist stetig differenzierbar und $\Phi(K) = M$. Es ist

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit hat man

$$I(\Phi) = \int_K \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right\|_2 \mathrm{d}(\varphi, z) = \int_0^h \int_0^{2\pi} r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}r = 2\pi r h$$

10.7.5 Inhalt von Flächenstücken

Es stellt sich wie zuvor bei der Untersuchung von Wegen und Bögen die Frage, ob man $I(\Phi)$ als Inhalt des Flächenstücks $S = \Phi(K)$ auffassen kann. Im Allgemeinen ist das natürlich nicht der Fall. Wählt man im Beispiel des Zylindermantels dieselbe Abbildungsvorschrift, allerdings mit dem Parameterbereich $\tilde{K} = [0, 4\pi] \times [0, h]$, als Parametrisierungfunktion $\tilde{\Phi}$, dann ist zwar $S = \tilde{\Phi}(\tilde{K})$, aber $I(\tilde{\Phi}) = 2I(\Phi) = 4\pi r h$.

Aber: unter „zulässigen" Parameterwechseln ändert sich der Inhalt eines Flächenstücks nicht.

Definition. Sei $\Phi|_K$ eine Parametrisierung von S, wobei für eine offene Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ die Funktion $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar sei, und K eine kompakte, Jordan-messbare Menge sei.

Seien $G \subseteq \mathbb{R}^2$ eine offene Menge, $T \subseteq G$ eine kompaket, Jordan-messbare Menge, $g : G \to \mathbb{R}^2$ eine Abbildung, die den Voraussetzungen der Transformationsformel genügt, d. h. g sei stetig differenzierbar, $g|_T$ injektiv, $\det Dg \neq 0$ auf G, $g(T) = K$. Der Übergang von $\Phi|_K$ zu $\Psi : G \to \mathbb{R}^3$, $(s,t) \mapsto \Phi(g(s,t))$ heißt **zulässiger Parameterwechsel**.

Das Flächenstück S kann also auch durch Ψ parametrisiert werden, und es ist

$$\begin{aligned} I(\Psi) &= \int_T \left\| \frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t} \right\|_2 \mathrm{d}(s,t) \\ &= \int_T \left\| \frac{\partial (\Phi \circ g)}{\partial s} \times \frac{\partial (\Phi \circ g)}{\partial t} \right\|_2 \mathrm{d}(s,t) \end{aligned}$$

Mit Hilfe der Kettenregel sieht man ein

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\Phi \circ g)}{\partial s}(s,t) &= (D\Phi(g(s,t)) \cdot Dg(s,t))\, e_1 \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(g(s,t)) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(g(s,t)) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(g(s,t)) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(g(s,t)) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(g(s,t)) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(g(s,t)) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial g_2}{\partial s}(s,t) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(g(s,t)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(g(s,t)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(g(s,t)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(g(s,t)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial s}(s,t) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(g(s,t)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial s}(s,t) + \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(g(s,t)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial s}(s,t) \end{pmatrix} \\ \frac{\partial (\Phi \circ g)}{\partial t}(s,t) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}(g(s,t)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}(g(s,t)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial t}(s,t) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}(g(s,t)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}(g(s,t)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial t}(s,t) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}(g(s,t)) \cdot \frac{\partial g_1}{\partial t}(s,t) + \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}(g(s,t)) \cdot \frac{\partial g_2}{\partial t}(s,t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Weiter ohne das Mitführen der Argumente

$$\begin{aligned} &\frac{\partial (\Phi \circ g)}{\partial s} \times \frac{\partial (\Phi \circ g)}{\partial t} \\ &= \begin{pmatrix} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial s} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}\frac{\partial g_2}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}\frac{\partial g_2}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial s} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}\frac{\partial g_2}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}\frac{\partial g_2}{\partial t}\right) \\ \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial s} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}\frac{\partial g_2}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\frac{\partial g_2}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial s} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\frac{\partial g_2}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}\frac{\partial g_2}{\partial t}\right) \\ \left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial s} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\frac{\partial g_2}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}\frac{\partial g_2}{\partial t}\right) - \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial s} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}\frac{\partial g_2}{\partial s}\right)\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\frac{\partial g_2}{\partial t}\right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}\frac{\partial \Phi_3}{\partial v}\frac{\partial g_1}{\partial s}\frac{\partial g_2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}\frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial t}\frac{\partial g_2}{\partial s} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\frac{\partial \Phi_2}{\partial v}\frac{\partial g_1}{\partial s}\frac{\partial g_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}\frac{\partial \Phi_2}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial t}\frac{\partial g_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\frac{\partial g_1}{\partial s}\frac{\partial g_2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_3}{\partial v}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial t}\frac{\partial g_2}{\partial s} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial \Phi_3}{\partial v}\frac{\partial g_1}{\partial s}\frac{\partial g_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial t}\frac{\partial g_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial \Phi_2}{\partial v}\frac{\partial g_1}{\partial s}\frac{\partial g_2}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\frac{\partial \Phi_2}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial t}\frac{\partial g_2}{\partial s} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\frac{\partial g_1}{\partial s}\frac{\partial g_2}{\partial t} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial v}\frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial g_1}{\partial t}\frac{\partial g_2}{\partial s} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}\frac{\partial \Phi_3}{\partial v}\left(\frac{\partial g_1}{\partial s}\frac{\partial g_2}{\partial t} - \frac{\partial g_1}{\partial t}\frac{\partial g_2}{\partial s}\right) + \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\frac{\partial \Phi_2}{\partial v}\left(\frac{\partial g_1}{\partial t}\frac{\partial g_2}{\partial s} - \frac{\partial g_1}{\partial s}\frac{\partial g_2}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\left(\frac{\partial g_1}{\partial s}\frac{\partial g_2}{\partial t} - \frac{\partial g_1}{\partial t}\frac{\partial g_2}{\partial s}\right) + \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial \Phi_3}{\partial v}\left(\frac{\partial g_1}{\partial t}\frac{\partial g_2}{\partial s} - \frac{\partial g_1}{\partial s}\frac{\partial g_2}{\partial t}\right) \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial \Phi_2}{\partial v}\left(\frac{\partial g_1}{\partial s}\frac{\partial g_2}{\partial t} - \frac{\partial g_1}{\partial t}\frac{\partial g_2}{\partial s}\right) + \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v}\left(\frac{\partial g_1}{\partial t}\frac{\partial g_2}{\partial s} - \frac{\partial g_1}{\partial s}\frac{\partial g_2}{\partial t}\right) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}\frac{\partial \Phi_3}{\partial v} - \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\frac{\partial \Phi_2}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} - \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial \Phi_3}{\partial v} \\ \frac{\partial \Phi_1}{\partial u}\frac{\partial \Phi_2}{\partial v} - \frac{\partial \Phi_2}{\partial u}\frac{\partial \Phi_1}{\partial v} \end{pmatrix} \left(\frac{\partial g_1}{\partial s}\frac{\partial g_2}{\partial t} - \frac{\partial g_1}{\partial t}\frac{\partial g_2}{\partial s} \right) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right) \cdot \det Dg$$

Also

$$I(\Psi) = \int_T \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_2 \cdot |\det Dg| \,\mathrm{d}(s,t) = \int_{g(T)} \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|_2 \mathrm{d}(u,v) = I(\Phi)$$

Es ist also sinnvoll, den Flächeninhalt eines Flächenstücks durch $I(S) = I(\Phi)$ zu definieren, wobei Φ eine beliebige injektive Parametrisierung von S ist.

10.7.6 In alternativer Schreibweise

Bemerkung. Ist $\Phi|_K$ eine Fläche im $\mathbb{R}^3$ und schreibt man $\Phi(u,v) = X(u,v)\vec{i} + Y(u,v)\vec{j} + Z(u,v)\vec{k}$ mit den reellwertigen Komponentenfunktionen X, Y, Z, dann erhält man

$$N_\Phi(u,v) := \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\vec{i} + \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\vec{j} + \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\vec{k},$$

wobei

$$\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \\ \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v} \\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} := \begin{vmatrix} \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v} \\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

Damit ergibt sich

$$I(\Phi) = \int_K \sqrt{\left(\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\right)^2} \,\mathrm{d}(u,v)$$

Vergleichen wir dies mit der Formel für die Weglänge eines stetig differenzierbaren Weges $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3) : [a,b] \to \mathbb{R}^3$:

$$L(\gamma) = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\| \,\mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{(\dot{\gamma}_1(t))^2 + (\dot{\gamma}_2(t))^2 + (\dot{\gamma}_3(t))^2} \,\mathrm{d}t$$

10.7.7 Motivation des Oberflächenintegrals skalarer Funktionen

Wie auch beim Wegintegral unterscheidet man zwischen dem Oberflächenintegral einer skalaren und einer vektorwertigen Funktion. Gegeben sei in beiden Fällen ein Flächenstück $S = \Phi(K)$, wobei wie gewohnt K eine kompakte, Jordan-messbare Teilmenge einer offenen Menge $D \subseteq \mathbb{R}^2$ sei und $\Phi : D \to \mathbb{R}^3$ eine injektive C^1-Fläche.

Den Fall einer skalarwertigen stetigen Funktion $f : \Phi(K) \to \mathbb{R}$ kann man wie im Falle der Wegintegrale mit der Vorstellung einer auf dem Flächenstück gegebenen Massendichte motivieren.

Der Einfachheit halber sei $K = [a,b] \times [c,d]$ ein Quader. Geben wir uns nun wieder eine Zerlegung

$$Z = \{a = u_0, \ldots, u_p = b\} \times \{c = v_0, \ldots, v_q = d\}$$

von K vor, dann sollte bei genügender Feinheit der Zerlegung

$$f(\Phi(u_i, v_j)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_i, v_j) \right\|_2 (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j)$$

eine Approximation der Masse des gekrümmten Flächenstücks $\Phi(K)$ über dem Rechteck $[u_i, u_{i+1}] \times [v_j, v_{j+1}]$ sein. Also sollte die Gesamtmasse durch

$$\sum_{i=0}^{p-1} \sum_{j=0}^{q-1} f(\Phi(u_i, v_j)) \cdot \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u_i, v_j) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u_i, v_j) \right\|_2 (u_{i+1} - u_i)(v_{j+1} - v_j)$$

angenähert werden. Für $|Z| \to 0$ wir daraus

$$\int_K f(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right\|_2 D(u, v)$$

10.7.8 Definition des Oberflächenintegrals für skalare Funktionen

Dies motiviert

Definition 10.7.3. Sind Φ eine Fläche mit Parameterbereich K wie in Definition 10.7.1, $f : \Phi(K) \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so heißt

$$\int_\Phi f \, \mathrm{d}\sigma := \int_K f(\Phi(u, v)) \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u}(u, v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u, v) \right\|_2 D(u, v)$$

Oberflächenintegral von f über Φ.

Bemerkung.

1. Wieder bietet sich eine Vergleich mit dem Wegintegral einer reellwertigen Funktion im Falle eines C^1-Weges an:

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t)) \, \|\dot{\gamma}(t)\|_2 \, \mathrm{d}t$$

2. Mit Hilfe der Substitutionsregel sieht man, dass $\int_\Phi f \, \mathrm{d}\sigma$ invariant unter zulässigen Parametertransformationen ist. Deshalb kann man definieren

$$\int_S f \, \mathrm{d}\sigma := \int_\Phi f \, \mathrm{d}\sigma,$$

wobei $S = \Phi(K)$, $\Phi|_K$ eine C^1-Fläche und $\Phi|_{\mathrm{int}K}$ injektiv sei.

10.7.9 Motivation des Oberflächenintegrals für Vektorfelder

Um wieder auf physikalische Anwendungen zurückzugreifen, können wir $F : \Phi(K) \to \mathbb{R}^3$ zum Beispiel als Geschwindigkeitsfeld einer Strömung, oder als magnetische Flussdichte auffassen. Die Idee ist, dass der zugehörige Fluss (eine skalare Größe) am grösten sein wird, wenn er senkrecht durch die Oberfläche fließt, und verschwindet, wenn er parallel dazu fließt. Dies kann man dadurch erreichen, indem über das Skalarprodukt des Vektorfeldes mit dem Normaleneinheitsvektor der Fläche integriert. Man wird also definieren

$$\int_\Phi F\,\mathrm{d}\vec{\sigma} := \int_\Phi F \cdot n_\Phi\,\mathrm{d}\sigma$$

Alternativ kann man eine Definition analog zum Wegintegral motivieren. Für diese hatten wir

$$f \text{ reellwertig: } \int_\gamma f\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(\gamma(t))\,\|\dot{\gamma}(t)\|_2\,\mathrm{d}t$$

$$F \text{ vektorwertig: } \int_\gamma F\,\mathrm{d}\vec{x} = \int_a^b F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t)\,\mathrm{d}t$$

Also könnte man aus unserer Definition des Oberflächenintegrals für skalare Funktionen ableiten:

$$f \text{ reellwertig: } \int_\Phi f\,\mathrm{d}\sigma := \int_K f(\Phi(u,v)) \left\| \frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,v) \right\|_2 D(u,v)$$

$$F \text{ vektorwertig: } \int_\Phi F\,\mathrm{d}\vec{\sigma} := \int_K F(\Phi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,v) \right) D(u,v)$$

10.7.10 Definition des Oberflächenintegrals für Vektorfeld

Definition 10.7.4. Seien Φ eine Fläche mit Parameterbereich K wie in Definition 10.7.1, $F:\ \Phi(K) \to \mathbb{R}^3$ eine stetige Funktion. Dann heißt

$$\begin{aligned} \int_\Phi F\,\mathrm{d}\vec{\sigma} &:= \int_K F(\Phi(u,v)) \cdot N_\Phi(u,v)\,\mathrm{d}(u,v) \\ &= \int_K F(\Phi(u,v)) \cdot n_\Phi(u,v) \cdot \|N_\Phi(u,v)\|_2\,\mathrm{d}(u,v) = \int_\Phi F \cdot n_\Phi\,\mathrm{d}\sigma \end{aligned}$$

das **Oberflächenintegral von F über Φ**.

Bemerkung.

1. Setzt man für $F = (P,Q,R):\ \Phi(K) \to \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} \int_\Phi P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z &:= \int_K P(\Phi(u,v)) \cdot \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}(u,v), \\ \int_\Phi Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x &:= \int_K Q(\Phi(u,v)) \cdot \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}(u,v), \\ \int_\Phi R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y &:= \int_K R(\Phi(u,v)) \cdot \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}(u,v) \end{aligned}$$

   dann kann das Oberflächenintegral wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned} \int_\Phi F\,\mathrm{d}\vec{\sigma} &= \int_K F(\Phi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial\Phi}{\partial v}(u,v) \right) D(u,v) \\ &= \int_\Phi P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \int_\Phi Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \int_\Phi R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= \int_\Phi P\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + Q\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + R\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \end{aligned}$$

2. Mit der Substitutionsregel folgt, dass für zulässige Parameterwechsel $g : G \to \mathbb{R}^2$, $T \subseteq G$ kompakte Menge mit $g(T) = K$, $\Psi = \Phi \circ g$ eine C^1-Parametrisierung des Flächenstücks $S = \Phi(K)$ mit Parameterbereich T ist. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_\Psi F \,\mathrm{d}\vec{\sigma} &= \int_T F(\Psi(s,t)) \cdot \left(\frac{\partial \Psi}{\partial s} \times \frac{\partial \Psi}{\partial t}\right) D(s,t) \\ &= \int_T F(\Phi(g(s,t))) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)\Bigg|_{(u,v)=g(s,t)} \det Dg(s,t) D(s,t) \\ &= \pm \int_{g(T)} F(\Phi(u,v)) \cdot \left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}(u,v) \times \frac{\partial \Phi}{\partial v}(u,v)\right) D(u,v)\end{aligned}$$

Das Vorzeichen hängt dabei von dem von $\det Dg$ ab (da g zulässige Substitutionsfunktion ist, muss $\det Dg \neq 0$ auf ganz T gelten, d. h. das Vorzeichen ist unabhängig von einem konkreten Punkt $(s,t) \in T$). Also hat man

$$\int_\Psi F \,\mathrm{d}\vec{\sigma} = \begin{cases} \int_\Phi F \,\mathrm{d}\vec{\sigma}, & \det Dg > 0 \\ -\int_\Phi F \,\mathrm{d}\vec{\sigma}, & \det Dg < 0 \end{cases}$$

10.8 Satz von Stokes

10.8.1 Formulierung

Satz 10.8.1. Sei Φ eine parametrisierte Fläche wie in Definition 10.7.1, deren Parameterbereich K ein BV-Normalbereich bezüglich beider Achsen ist. Zusätzlich gelte, dass Φ eine C^2-Abbildung ist.

Der positiv orientierte Rand ∂K sei mittels eines stückweise stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisierbar. $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ sei ein stetig differenzierbares Vektorfeld auf einer offenen, $\Phi(K)$ umfassenden offenen Menge. Dann gilt

$$\int_\Phi \operatorname{rot} F \,\mathrm{d}\vec{\sigma} = \int_{\Phi\circ\gamma} F \,\mathrm{d}x$$

Erinnerung. Die Rotation eines differenzierbaren Vektorfeldes $F : G \to \mathbb{R}^3$, wobei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ eine offene Menge sei, ist definiert als

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \text{„}\nabla \times F\text{“}$$

10.8.2 Alternative Schreibweise und physikalische Interpretation

Bemerkung.

1. Mit Hilfe des Dachprodukts „$\wedge$“ kann die Regel von Stokes auch wie folgt geschrieben werden:

$$\begin{aligned}&\int_\Phi \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right) \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y}\right) \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \\ &= \int_{\Phi\circ\gamma} P \,\mathrm{d}x + Q \,\mathrm{d}y + R \,\mathrm{d}z\end{aligned}$$

2. Physikalisch lässt sich der Satz wie folgt interpretieren:

   Fassen wir F als Geschwindigkeitsfeld einer strömenden Flüssigkeit auf, so gibt $\operatorname{rot} F$ anschaulich an, wie schnell und um welche Achse sich ein Probekörper an einer Stelle des Feldes bewegt. $\operatorname{rot} F \cdot n$ stellt die sogenannte Wirbeldichte der Strömung dar. Es ist

   $$\int_{\Phi} \operatorname{rot} F \,\mathrm{d}\vec{\sigma} = \int_{\Phi} \operatorname{rot} F \cdot n \,\mathrm{d}\sigma,$$

   also die „Summe aller Wirbel“ über $\Phi(K)$, nach dem Satz gleich

   $$\int_{\Phi\circ\gamma} F \,\mathrm{d}x,$$

   der Zirkulation von f entlang $\Phi \circ \gamma$, die also angibt in wie weit sich die Geschwindigkeitsvektoren längs ∂S wie die Tangentialvektoren drehen, wenn man den Rand von S in positiver Richtung umläuft.

   Dabei muss der Weg $\Phi \circ \gamma$ nicht mit dem anschaulichen Rand von S übereinstimmen. Im Falle des Zylindermantels mit der üblichen Parametrisierung mit einem Rechteck als Parameterbereich zum Beispiel wird die „Naht“, an dem das Rechteck zum Mantel „zusammengeklebt“ wird, zweimal durchlaufen (siehe Bild), allerdings in unterschiedlichen Richtungen. In der Summe heben sich die Anteile der doppelt durchlaufenen Abschnitte also weg.

10.8.3 Beweis des Satzes

Beweis. Schreiben wir $\Phi = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$, so gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\Phi\circ\gamma} P \,\mathrm{d}x &= \int_a^b P(\Phi(\gamma(t)))\,\mathrm{d}X(\gamma(t)) \\
&= \int_a^b P(\Phi(\gamma(t)))\frac{\mathrm{d}(X\circ\gamma)}{\mathrm{d}t}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_a^b P(\Phi(\gamma(t)))\left(\frac{\partial X}{\partial u}(\gamma(t))\dot{\gamma_1}(t) + \frac{\partial X}{\partial v}(\gamma(t))\dot{\gamma_2}(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{\gamma} (P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial u}\,\mathrm{d}u + (P\circ\Phi)\,\frac{\partial X}{\partial v}\,\mathrm{d}v
\end{aligned}$$

Da K ein BV-Normalbereich bezüglich beider Achsen ist und ∂K durch γ positiv orientiert parametrisiert wird, erhält man nach dem Satz von Gauß-Green

$$\begin{aligned}
\ldots &= \int_K \frac{\partial\left[(P\circ\Phi)\cdot\frac{\partial X}{\partial v}\right]}{\partial u}(u,v)\,\mathrm{d}(u,v) - \frac{\partial\left[(P\circ\Phi)\cdot\frac{\partial X}{\partial u}\right]}{\partial v}(u,v) \\
&= \int_K \frac{\partial(P\circ\Phi)}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial X}{\partial v}(u,v) - P(\Phi(u,v))\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v}\,\mathrm{d}(u,v) \\
&\qquad - \frac{\partial(P\circ\Phi)}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial X}{\partial u}(u,v) + P(\Phi(u,v))\cdot\frac{\partial^2 X}{\partial v\partial u} \\
&= \int_K \frac{\partial(P\circ\Phi)}{\partial u}(u,v)\cdot\frac{\partial X}{\partial v}(u,v) - \frac{\partial(P\circ\Phi)}{\partial v}(u,v)\cdot\frac{\partial X}{\partial u}(u,v)\,\mathrm{d}(u,v),
\end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt der Satz von Schwartz ausgenutzt wurde (Φ wurde als C^2-Abbildung vorausgesetzt). Weiter (Argumente wurden außer im jeweils ersten Term weggelassen)

$$\begin{aligned}
\ldots &= \int_K \left(\frac{\partial P}{\partial x}(\Phi(u,v))\cdot\frac{\partial X}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial u} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial u}\right)\cdot\frac{\partial X}{\partial v} \\
&\qquad - \left(\frac{\partial P}{\partial x}(\Phi(u,v))\cdot\frac{\partial X}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial P}{\partial y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial v} + \frac{\partial P}{\partial z}\cdot\frac{\partial Z}{\partial v}\right)\cdot\frac{\partial X}{\partial u}\,\mathrm{d}(u,v) \\
&= \int_K \frac{\partial P}{\partial y}\left(\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right) + \frac{\partial P}{\partial z}\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u}\right)\mathrm{d}(u,v)
\end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Y}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Y}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} &= \begin{vmatrix}\frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v}\\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v}\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}\frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v}\\ \frac{\partial Y}{\partial u} & \frac{\partial Y}{\partial v}\end{vmatrix} = -\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}, \\
\frac{\partial Z}{\partial u}\frac{\partial X}{\partial v} - \frac{\partial Z}{\partial v}\frac{\partial X}{\partial u} &= \begin{vmatrix}\frac{\partial Z}{\partial u} & \frac{\partial Z}{\partial v}\\ \frac{\partial X}{\partial u} & \frac{\partial X}{\partial v}\end{vmatrix} = \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)},
\end{aligned}$$

also haben wir ingesamt

$$\begin{aligned}
\int_{\Phi\circ\gamma} P\,\mathrm{d}x &= \int_K \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)} - \frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\,\mathrm{d}(u,v) \\
&= \int_K \frac{\partial P}{\partial z}\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

Analog zeigt man die nötigen Gleichungen für Q und R. □

10.9 Gauß'scher Satz im Raum

Wenden wir uns nun der Verallgemeinerung des Divergenzsatzes im $\mathbb{R}^3$ zu.

10.9.1 C^1-Normalbereiche

Definition 10.9.1. Sei $K \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte, Jordan-messbare Menge. Ein Bereich

$$V = \{(x,y,z) \mid (x,y)\in K, \varphi_1(x,y)\le z\le\varphi_2(x,y)\}$$

heißt im Folgenden C^1-Normalbereich bezüglich der x-y-Ebene, falls gilt

- $\varphi_1, \varphi_2 : K \to \mathbb{R}$ sind stetig differenzierbare Funktionen.
- ∂K ist positiv orientierter Bogen eines stückweise stetig differenzierbaren Weges $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}$.
- Für $i \in \{1, 2\}$ sei $S_i = \Gamma_{\varphi_i}$ parametrisiert durch

$$\Phi_i(u, v) = (X_i(u, v), Y_i(u, v), Z_i(u, v))$$

mit kompaktem, Jordan-messbarem Parameterbereich $K_i \subseteq \mathbb{R}^2$ so, dass $Z_i(u, v) = \varphi_i(X_i(u, v), Y_i(u, v))$ gilt, und $g_i(u, v) = (X_i(u, v), Y_i(u, v))$ eine zulässige Substitutionsfunktion mit $g(K_i) = K$ ist. Zusätzlich soll gelten: $\det Dg_1 < 0$ auf K_1 und $\det Dg_2 > 0$ auf K_2 (jeweils natürlich mit eventueller Ausnahme von Jordan-Nullmengen).

- In fast allen Punkten kann ein (äußerer) Normaleneinheitsvektor auf den Oberflächen S_i definiert werden.

Analog werden C^1-Normalbereiche bezüglich der x-z- und der y-z-Ebene definiert werden. Ein C^1-Normalbereich V bezüglich aller Ebenen ist ein Bereich $V \subseteq \mathbb{R}^3$, der C^1-Normalbereich bezüglich der x-y-, y-z- und x-z-Ebene ist.

10.9.2 Beispiele

1. Jeder Quader $Q = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, b_2] \subseteq \mathbb{R}^3$ ist ein C^1-Normalbereich bezüglich aller Ebenen. Bezüglich der x-y-Ebene kann man zum Beispiel den Parameterbereich $K = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2]$, die einschränkenden Funktionen $\varphi_i = c_i$ $(i = 1, 2)$ und die Parametrisierungen $\Phi_1(u, v) = (v, u, c_1)$ mit $(u, v) = K_1 = K$, $\Phi_2(u, v) = (u, v, c_2)$ mit $(u, v) \in K_2 = [b_1, b_2] \times [a_1, a_2]$ verwenden.

2. Jede Kugel mit Radius $R > 0$ ist ein C^1-Normalbereich bezüglich aller Koordinatenebenen. Sei o. B. d. A. der Kugelmittelpunkt im Koordinatenursprung. Bezüglich der x-y-Ebene kann man zum Beispiel den Parameterbereich $K = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\right\}$, die einschränkenden Funktionen

$$\varphi_i(x, y) = (-1)^i \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}, \quad (x, y) \in K$$

und die Parametrisierungen

$$\Phi_i(\varphi, \theta) = (R \sin\theta \cos\varphi, R \sin\theta \sin\varphi, R \cos\theta), \quad (\varphi, \theta) \in K_i$$

mit $K_1 = [0, 2\pi] \times \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $K_2 = \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times [0, 2\pi]$.

10.9.3 Formulierung des Satzes

Satz 10.9.2 (Divergenzssatz von Gauß)**.** Sind $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ein C^1-Normalbereich bezüglich aller Koordinatenachsen, $O \supseteq V$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^3$ und $F : O \to \mathbb{R}^3$ definiert durch $F = P\vec{i} + Q\vec{j} + R\vec{k}$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld. Dann gilt

$$\int_V \operatorname{div} F \, \mathrm{d}(x, y, z) = \int_{\partial V} P \, \mathrm{d}y \wedge \, \mathrm{d}z + Q \, \mathrm{d}z \wedge \, \mathrm{d}x + R \, \mathrm{d}x \wedge \, \mathrm{d}y$$

Ausgedrückt mit Hilfe des äußeren Normaleneinheitsvektors n an der Oberfläche ∂V gilt

$$\int_V \operatorname{div} F \, \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\partial V} F \cdot n \, \mathrm{d}\sigma$$

Bemerkung. Es handelt sich hier in der Tat um den äußeren Normaleneinheitsvektor. Betrachte die Charakterisierung von V als C^1-Normalbereiche bezüglich der x-y-Ebene: Für den Normalenvektor am „Boden" gilt

$$N_1(u,v) = \frac{\partial \Phi_1}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial v} = \left(\ldots, \ldots, \frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_1}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial v} \right)$$

Es ist aber $\frac{\partial X_1}{\partial u}\frac{\partial Y_1}{\partial v} - \frac{\partial Y_1}{\partial u}\frac{\partial X_1}{\partial v} = \det Dg_1 < 0$, also zeigt der Vektor tatsächlich vom Bereich weg. Entsprechend ist für den am Deckel die 3. Komponente > 0, da wir $\det Dg_2 > 0$ gefordert haben.

Betrachte nun $\partial V \setminus (S_1 \cup S_2) =: S_3$ (die „Mantelfläche" des C^1-Normalbereiches V). S_3 kann durch

$$\Phi_3(u,v) = (\gamma_1(u), \gamma_2(u), v)^T =: (X_3, Y_3, Z_3), \quad (u,v) \in K_3$$

mit $K_3 := \left\{ (u,v) \in \mathbb{R}^2 \mid \varphi_1(\gamma(u)) \leq v \leq \varphi_2(\gamma(u)) \right\}$ parametrisiert werden. Als Normalenvektor haben wir

$$N_3(u,v) = \frac{\partial \Phi_3}{\partial u} \times \frac{\partial \Phi_3}{\partial v} = \begin{pmatrix} \dot\gamma_1 \\ \dot\gamma_2 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Da unsere Koordinatenachsen ein Rechtssystem bilden, sieht man sofort ein, dass das Kreuzprodukt wegen der positiven Umlaufrichtung nach außen zeigt.

Beweis. Wir zeigen als stärkeres Einzelergebnis, dass für einen C^1-Normalbereich bezüglich der x-y-Ebene und stetig differenzierbares R mit gleichem Definitionsbereich wie F aus dem Satz gilt

$$\int_V \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) \, \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\partial V} R \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Mit dieser Voraussetzung gilt nämlich

$$\begin{aligned}\int_V \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) \, \mathrm{d}(x,y,z) &= \int_K \int\limits_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}(x,y,z) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}(x,y) \\ &= \int_K \left(R(x,y,\varphi_2(x,y)) - R(x,y,\varphi_1(x,y)) \right) \mathrm{d}(x,y)\end{aligned}$$

Nun sind g_1, g_2 Substitutionsfunktionen mit $g_1(K_1) = g_2(K_2) = K$, womit weiter gilt

$$\begin{aligned}
\ldots &= \int_{K_2} R(g_2(u,v), \varphi_2(g_2(u,v)))\, |\det Dg_2(u,v)|\, \mathrm{d}(u,v) \\
&\quad - \int_{K_1} R(g_1(u,v), \varphi_1(g_1(u,v)))\, |\det Dg_1(u,v)|\, \mathrm{d}(u,v) \\
&= \int_{K_2} R(X_2(u,v), Y_2(u,v), Z_2(u,v)) \det Dg_2(u,v)\, \mathrm{d}(u,v) \\
&\quad + \int_{K_1} R(X_1(u,v), Y_1(u,v), Z_1(u,v)) \det Dg_1(u,v)\, \mathrm{d}(u,v) \\
&= \int_{K_2} R(\Phi_2(u,v)) \frac{\partial(X_2,Y_2)}{\partial(u,v)}\, \mathrm{d}(u,v) + \int_{K_1} R(\Phi_1(u,v)) \frac{\partial(X_1,Y_1)}{\partial(u,v)}\, \mathrm{d}(u,v)
\end{aligned}$$

Betrachte nun die in der vorausgegangenen Bemerkung definierte „Mantelfläche" des C^1-Normalbereiches V) und ihre Parametrisierung Φ_3 mit Parameterbereich K_3. Auf K_3 gilt

$$\frac{\partial(X_3,Y_3)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\mathrm{d}\gamma_1}{\mathrm{d}u}(u) & 0 \\ \frac{\mathrm{d}\gamma_2}{\mathrm{d}u}(u) & 0 \end{vmatrix} = 0$$

(mit eventueller Ausnahme einer Jordan-Nullmenge, die zum Beispiel die Streifen umfasst, an denen γ nicht stetig differenzierbar ist). Somit ist

$$\int_{\Phi_3} R\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y = \int_{K_3} R(\Phi_3(u,v)) \frac{\partial(X_3,Y_3)}{\partial(u,v)}\, \mathrm{d}(u,v) = 0$$

Also folgt

$$\int_V \frac{\partial R}{\partial z}\, \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\partial V} R\, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

Analog zeigt man mit Hilfe der Charakterisierung von V als C^1-Normalbereich bezüglich der y-z-Ebene, dass

$$\int_V \frac{\partial P}{\partial x}\, \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\partial V} P\, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z$$

gilt, und schließlich

$$\int_V \frac{\partial Q}{\partial y}\, \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\partial V} Q\, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x$$

damit, dass V ein C^1-Normalbereich bezüglich der x-z-Ebene ist. □

10.9.4 Green'sche Formeln

Korollar 10.9.3 (Green'sche Formeln)**.** Es sei V wie in Definition 10.9.1. Weiter seiehn u, v C^2-Funktionen, die auf einer V umfassenden offenen Menge definiert sind. Dann gilt

i)
$$\int_V (\operatorname{grad} u \cdot \operatorname{grad} v + u\, \Delta\, v)\, \mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\partial V} u \frac{\partial v}{\partial n}\, \mathrm{d}\sigma,$$

wobei $\frac{\partial v}{\partial n} = \operatorname{grad} v \cdot n$ die sogenannte „Normalenableitung von v" ist, d. h. die Richtungsableitung von v in Richtung des äußeren Normaleneinheitsvektors.

ii)
$$\int_V (u\,\Delta\,v - v\,\Delta\,u)\,\mathrm{d}(x,y,z) = \int_{\partial V} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}\sigma$$

Beweis.

ii) folgt aus i), indem man die Rollen von u und v vertauscht und die resultierenden Gleichungen voneinander abzieht.

i) Setze $F = u\,\mathrm{grad}\,v$, dann folgt aus dem Divergenzssatz

$$\begin{aligned}
\int_V \mathrm{div}\,(u\,\mathrm{grad}\,v)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{\partial V} u\,\mathrm{grad}\,v\cdot n\,\mathrm{d}\sigma \quad &\Leftrightarrow\\
\int_V (\mathrm{grad}\,u\cdot\mathrm{grad}\,v + u\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,v)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma &\Leftrightarrow\\
\int_V (\mathrm{grad}\,u\cdot\mathrm{grad}\,v + u\,\Delta\,v)\,\mathrm{d}(x,y,z) &= \int_{\partial V} u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

□

11 Maß- und Integrationstheorie

11.0 Motivation des Kapitels

11.0.1 Nachteile des Riemann'schen Integralbegriffs

Rekapitulieren wir nochmals die Idee des Riemann-Integrals:

Vorgelegt ist eine *beschränkte* Funktion $f : B \to X$, die von einem *beschränkten* Bereich des $\mathbb{R}^N$ in einen Banachraum X abbildet. Man schließt B in einen N-dimensionalen Quader ein, erweitert die Funktion auf diesen Quader, indem man sie außerhalb von B gleich 0 setzt und betrachtet Zerlegungen des Quaders in Unterquader mit einem Zwischenpunkt für jeden Unterquader. Jeder Zerlegung und jeder Wahl von Zwischenpunkten wird als Zwischensumme die Summe der Funktionswerte an den Zwischenpunkten gewichtet mit dem Volumen des Unterquaders zugeordnet. f heißt integrierbar, wenn jede Folge von solchen Zwischensummen, deren Zerlegungen in ihrer Feinheit gegen 0 konvergieren, gegen ein (und damit denselben) Wert in X konvergiert. Der Wert heißt dann Integral der Funktion.

Diese Vorgehensweise ist zwar einerseits natürlich, da sie auf der nachvollziehbaren Idee der Approximation des Integrals durch Vereinfachung des Definitionsbereichs und der Vereinfachung der Funktion basiert, sie hat aber offensichtlich Nachteile:

- Unbeschränkte Funktionen oder unbeschränkte Definitionsbereiche sind nicht erlaubt, man kann ihnen nur durch erneute Approximation beikommen.

- Der Integralbegriff ist schwerfällig in höheren Raumdimensionen.

- Nur fast überall stetige Funktionen sind Riemann-integrierbar, zum Beispiel ist die Dirichlet-Funktion

$$f :\ [0,1] \to \mathbb{R} \qquad\qquad f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

  kein Element von $\mathcal{R}([0,1])$, obwohl sie „nur" an abzählbar vielen Stellen einen Wert $\neq 0$ hat.

- Vertauschung von Limes und Integration ist nur unter starken Voraussetzung möglich, etwa bei gleichmäßiger Konvergenz einer Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von stetigen Funktionen auf $[a,b]$ gegen eine Funktion f. Betrachte aber eine Abzählung $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathbb{Q} \cap [0,1]$ und die auf $[0,1]$ definierte Funktionenfolge

$$f_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{x_1, \dots, x_n\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

  Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $f_n \in \mathcal{R}([0,1])$, da f_n fast überall stetig ist. f_n konvergiert monoton wachsend punktweise gegen das oben definierte f, und es gilt

$$\int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Aber $f \notin \mathcal{R}([0,1])$, obwohl es bloß natürlich wäre,

$$\int\limits_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0$$

zu setzen.

11.0.2 Idee des Lebesgue-Integrals

Es wäre also wünschenswert, den Riemann'schen Integrationsbegriff so zu erweitern, dass die obigen Nachteile behoben werden. Das führt zur Idee des **Lebesgue-Integrals** (nach Henri Lebesgue, 1902). Die Grundidee ist, anstatt des Definitionsbereiches den Bildbereich zu zerlegen. Für eine Funktion $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ betrachtet man also Mengen der Form

$$E_{k,n} = \left\{ x \in [a,b] \mid \frac{k}{n} \leq f(x) \leq \frac{k+1}{n}, n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Falls die Mengen $E_{k,n}$ Intervalle (oder Vereinigungen von endlich vielen disjunkten Intervallen) sind, dann sollte

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{k}{n} |E_{k,n}|$$

für genügend große n eine gute Approximation des Flächeninhalts unter dem Graphen von f darstellen, sofern $f \geq 0$ ist. Die Frage der Konvergenz für $n \to \infty$ bliebe zu untersuchen.

11.0.3 Auftretende Probleme

Das Problem hierbei ist: Wenn f eine beliebige Funktion ist, dann sind die Mengen $E_{k,n}$ im Allgemeinen keine Intervalle und auch keine Vereinigungen von disjunkten Intervallen, sondern „beliebige Menen". Es ist also notwendig, zunächst einmal „beliebige" Mengen „messen" zu können. Dabei sollte der gesuchte Maßbegriff konsistent mit dem klassischen Inhaltsbegriff sein, d. h. wenn μ die Mengenfunktion auf den Teilmengen eines Intervalls (oder $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$) ist, dann sollte $\mu([a,b]) = b - a$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ gelten. Außerdem sollte natürlicherweise gelten

- $\mu(E) \geq 0 \quad \forall\, E$,
- $\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F)$, falls E und F disjunkt sind,
- $\mu(x_0 + E) = \mu(E)$ und $\mu(\alpha E) = \alpha^N \mu(E)$ für jedes Teilmenge $E \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, $\alpha > 0$, für den Fall, dass μ eine Mengenfunktion auf $\mathbb{R}^N$ ist,

Man kann aber zeigen, dass keine solche Mengenfunktion auf ganz $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ (für $N \geq 1$) existiert. Man muss sich also auf geeignete, kleinere Mengensysteme von Teilmengen von $\mathbb{R}^N$ einschränken.

11.1 σ-Algebren

Sei im Folgenden $S \neq \emptyset$ eine beliebige Menge.

11.1.1 Mengenringe, -algebren und σAlgebren

Wir führen zunächst geeignete Mengensysteme ein.

Definition 11.1.1.

a) $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(S)$ heißt **Ring** oder **Mengenring** über S, falls gilt

   i) $\emptyset \in \mathcal{R}$,

   ii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{R}$ und

   iii) $A, B \in \mathcal{R} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{R}$. Induktiv folgt dann $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{R}$ für endlich viele $A_j \in \mathcal{R}$.

b) Gilt zusätzlich $S \in \mathcal{R}$, dann heißt $\mathcal{R}$ **(Mengen-)Algebra**.

c) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ heißt σ-Algebra, falls

   i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

   ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow S \setminus A \in \mathcal{A}$ und

   iii) $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_n A_n \in \mathcal{A}$.

Bemerkung. Meist hat man auf einem Ring bereits einen natürlichen Inhaltsbegriff gegeben und das Problem besteht darin, diesen auf ein größeres Mengensystem zu erweitern.

11.1.2 Beispiele

1. $\mathcal{A} = \{\emptyset, S\}$ ist die kleinste σ-Algebra auf S.
2. $\mathcal{A} = \mathcal{P}(S)$ ist die größte σ-Algebra auf S.
3. $\mathcal{R} = \{A \subseteq S \mid A \text{ endlich}\}$ ist ein Ring.

Ein weiteres wichtiges Beispiel folgt im nächsten Abschnitt.

11.1.3 Linkshalboffene Quader

Definition. Für $N \geq 1$, $S = \mathbb{R}^N$ schreiben wir für einen **linkshalboffenen Quader**

$$]a, b] := \prod_{k=1}^{N}]\alpha_k, \beta_k]$$

mit $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_N), b = (\beta_1, \dots, \beta_N)$, und $]a, b] = \emptyset$, wenn für ein $i \in \{1, \dots, N\}$ gilt $\alpha_i = \beta_i$.

Die Menge der linkshalboffenen Quader des $\mathbb{R}^N$ bezeichnen wir mit $\mathcal{I}^N$. Dann heißt **die Menge aller endlichen Vereinigungen linkshalboffener Quader**

$$\mathcal{F}^N := \left\{ \bigcup_{i=1}^{p}]a_i, b_i] \mid p \in \mathbb{N},\,]a_i, b_i] \in \mathcal{I}^N \quad \forall\, i = 1, \dots, p \right\}$$

Lemma 11.1.2.

i) Sind $I, J \in \mathcal{I}^N$, dann ist auch $I \cap J \in \mathcal{I}^N$.

ii) Sind $I, J \in \mathcal{I}^N$, so kann $I \setminus J$ als endliche disjunkte Vereinigung von Quadern aus $\mathcal{I}^N$ geschrieben werden. Insbesondere ist $I \setminus J \in \mathcal{F}^N$.

iii) Jede Menge $A \in \mathcal{F}^N$ kann als endliche disjunkte Vereinigung von Quadern aus $\mathcal{I}^N$ geschrieben werden.

iv) $\mathcal{F}^N$ ist ein Ring.

Beweis.

i) Seien

$$I = \prod_{k=1}^{N}]\alpha_k, \beta_k], \quad J = \prod_{k=1}^{N}]\gamma_k, \delta_k]$$

Es gilt für alle $k = 1, \ldots, N$

$$]\alpha_k, \beta_k] \cap]\gamma_k, \delta_k] =]\max\{\alpha_k, \gamma_k\}, \min\{\beta_k, \delta_k\}]$$

und damit

$$I \cap J = \prod_{k=1}^{N} (]\alpha_k, \beta_k] \cap]\gamma_k, \delta_k]) = \prod_{k=1}^{N}]\max\{\alpha_k, \gamma_k\}, \min\{\beta_k, \delta_k\}] \in \mathcal{I}^N$$

ii) Wir beweisen das per vollständiger Induktion über N.

Für $N = 1$ ist das klar.

$N \to N + 1$: Schreibe $I = I_1 \times I_2$, $J = J_1 \times J_2$, wobei $I_1, J_1 \in \mathcal{I}^N$ und $I_2, J_2 \in \mathcal{I}^1$, dann ist

$$I \setminus J = (\underbrace{(I_1 \setminus J_1)}_{\in \mathcal{I}^N \text{ nach IV}} \times \underbrace{I_2}_{\in \mathcal{I}^1}) \,\dot{\cup}\, (\underbrace{I_1}_{\in \mathcal{I}^N} \times \underbrace{(I_2 \setminus J_2)}_{\in \mathcal{I}^1 \text{ nach IA}}),$$

also eine disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{I}^{N+1}$.

iii) Wir führen den Beweis per vollständiger Induktion über die Anzahl n der disjunkten Mengen, deren Vereinigung A ist.

Für $n = 1$ ist die Aussage trivial.

$n \to n + 1$: Sei also $A \in \mathcal{F}^N$ mit $A = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j$, $I_j \in \mathcal{I}^N$. Dann ist nach Induktionsvoraussetzung

$$\bigcup_{j=1}^{n} I_j = \dot{\bigcup_{k=1}^{p}} J_k$$

mit $J_k \in \mathcal{I}^N$; also ist

$$A = \bigcup_{j=1}^{n} (I_j \setminus I_{n+1}) \,\dot{\cup}\, I_{n+1} = \dot{\bigcup_{k=1}^{p}} (J_k \setminus I_{n+1}) \,\dot{\cup}\, I_{n+1}$$

Jede Differenzmenge der disjunkten Vereinigung kann nach ii) als disjunkte Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{I}^N$ geschrieben werden, womit wir insgesamt eine Zerlegung in disjunkte Elemente aus $\mathcal{I}^N$ gefunden haben.

iv) Wir prüfen die definierenden Eigenschaften nach

   i) $\emptyset =]0,0] \in \mathcal{F}^n$ ✓

   ii) Seien $A, B \in \mathcal{F}^N$. Nach iii) gibt es $n, p \in \mathbb{N}$ und $I_j, J_k \in \mathcal{I}^N$ für $j = 1, \ldots, n$, $k = 1, \ldots, p$ mit $A = \bigcup_{j=1}^n I_j$ und $B = \bigcup_{k=1}^p J_k$. Damit ist

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \left(\bigcup_{j=1}^n I_j \right) \setminus \left(\bigcup_{k=1}^p J_k \right) \\ &= \bigcup_{j=1}^n ((\ldots (I_j \setminus J_1) \setminus J_2 \ldots) \setminus J_p) \end{aligned}$$

   Nach ii) kann $I_j \setminus J_1$ als Vereinigung $m_{j,1} \in \mathbb{N}$ disjunkter Elemente K_i aus $\mathcal{I}^N$ geschrieben werden. d. h. es gilt

$$\begin{aligned} A \setminus B &= \bigcup_{j=1}^n \left(\left(\ldots \left(\bigcup_{i=1}^{m_{j,1}} K_i \right) \setminus J_2 \ldots \right) \setminus J_p \right) \\ &= \bigcup_{j=1}^n \bigcup_{i=1}^{m_{j,1}} ((\ldots K_i \setminus J_2 \ldots) \setminus J_p) \end{aligned}$$

   Fährt man so fort, so folgt, dass $A \setminus B$ als endliche Vereinigung von Elementen aus $\mathcal{I}^N$ geschrieben werden kann.

   iii) ist trivial.

□

11.1.4 Durchschnitte in Ringen und σ-Algebren

Lemma 11.1.3. Sei $S \neq \emptyset$ eine Menge.

i) Seien $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein Ring, $A, B \in \mathcal{R}$, dann ist auch $A \cap B \in \mathcal{R}$.

ii) Seien $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ eine σ-Algebra, $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, dann ist auch $\bigcap_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$.

Beweis. Es gilt

i) $A \cap B = S \setminus ((S \setminus A) \cup (S \setminus B)) \in \mathcal{R}$;

ii) $\bigcap_{n=1}^\infty A_n = S \setminus (\bigcup_{n=1}^\infty (S \setminus A_n)) \in \mathcal{A}$.

□

11.1.5 Erzeuger von σ-Algebren

Definition 11.1.4. Sei $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(S)$ eine Menge von Teilmengen einer nicht-leeren Menge S. Dann existiert eine kleinste σ-Algebra $\sigma(\mathcal{E})$, die $\mathcal{E}$ umfasst, nämlich

$$\sigma(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}} \mathcal{A}$$

$\sigma(\mathcal{E})$ heißt **die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra**, $\mathcal{E}$ heißt **Erzeuger** (oder **Erzeugendensystem**) von $\sigma(\mathcal{E})$.

Bemerkung. Jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ ist ihr eigener Erzeuger: $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{A}$.

11.1.6 Erzeuger der Borel'schen Mengen

Ein Erzeuger einer σ-Algebra ist im Allgemeinen nicht eindeutig bestimmt, wie der nachfolgende Satz zeigt.

Satz 11.1.5. Setze

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_0 = \{]-\infty, r] \mid r \in \mathbb{R}\}\,, && \mathcal{E}_1 = \{]-\infty, r] \mid r \in \mathbb{Q}\}\,, \\
&\mathcal{E}_2 = \{]-\infty, r[\mid r \in \mathbb{R}\}\,, && \mathcal{E}_3 = \{]-\infty, r[\mid r \in \mathbb{Q}\}\,, \\
&\mathcal{E}_4 = \{O \subseteq \mathbb{R} \mid O \text{ offen}\}\,, && \mathcal{E}_5 = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ abgeschlossen}\}\,, \\
&\mathcal{E}_6 = \{A \subseteq \mathbb{R} \mid A \text{ kompakt}\}
\end{aligned}$$

Dann ist $\sigma(\mathcal{E}_0) = \ldots = \sigma(\mathcal{E}_6) = \sigma(\mathcal{F}^1)$. Analoges gilt für $\mathbb{R}^N$ für $N \geq 2$.

Beweis. Wir bemerken zunächst, dass aus $\mathcal{E} \subseteq \tilde{\mathcal{E}}$ auch $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \sigma(\tilde{\mathcal{E}})$ folgt; außerdem: wenn $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ gilt, dann ist $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$. Nun zum eigentlichen Beweis:

- $\sigma(\mathcal{E}_0) = \sigma(\mathcal{E}_1)$: Wegen $\mathcal{E}_1 \subseteq \mathcal{E}_0$ gilt $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_0)$. Sei andererseits $]-\infty, r] \in \mathcal{E}_0$ für ein $r \in \mathbb{R}$. Wähle eine Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{Q}$ mit $r_n > r$ und $r_n \searrow r$, dann gilt

$$]-\infty, r] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{]-\infty, r_n]}_{\in \mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)} \in \sigma(\mathcal{E}_1)$$

  Folglich ist $\mathcal{E}_0 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$, also $\sigma(\mathcal{E}_0) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$.

- $\sigma(\mathcal{E}_1) = \sigma(\mathcal{E}_3)$: Sei $]-\infty, r[\in \mathcal{E}_3$ für ein $r \in \mathbb{Q}$, dann ist für gewisse $r_n \in \mathbb{Q}$ mit $r_n \nearrow r$

$$]-\infty, r[= \underbrace{\bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{]-\infty, r_n]}_{\in \mathcal{E}_1 \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)}}_{\in \sigma(\mathcal{E}_1)} \in \sigma(\mathcal{E}_1),$$

  woraus $\sigma(\mathcal{E}_3) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_1)$ folgt.

  Sei andererseits $]-\infty, r] \in \mathcal{E}_1$ für ein $r \in \mathbb{Q}$, dann ist für gewisse $r_n \in \mathbb{Q}$ mit $r_n \searrow r$

$$]-\infty, r] = \underbrace{\bigcap_{n=1}^{\infty}]-\infty, r_n[}_{\in \sigma(\mathcal{E}_3)}$$

  Daraus folgt $\sigma(\mathcal{E}_1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_3)$.

- $\sigma(\mathcal{E}_0) = \sigma(\mathcal{E}_2)$ folgt analog.

- $\sigma(\mathcal{E}_0) = \sigma(\mathcal{E}_4)$: Da $\sigma(\mathcal{E}_0) = \sigma(\mathcal{E}_2)$ gilt und $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{E}_4$ ist, gilt auch $\sigma(\mathcal{E}_0) = \sigma(\mathcal{E}_2) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_4)$. Umgekehrt lässt sich jede offene Menge $A \subseteq \mathbb{R}$ (also $A \in \mathcal{E}_4$) als Vereinigung abzählbar vieler disjunkter offener Intervalle darstellen:

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty}]a_n, b_n[$$

  für gewisse $a_n, b_n \in \mathbb{R}, a_n < b_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Da $]a_n, b_n[\;=\;]-\infty, b_n[\setminus]-\infty, a_n] \in \sigma(\mathcal{E}_0)$, ist auch $A \in \sigma(\mathcal{E}_0)$. Folglich ist $\sigma(\mathcal{E}_4) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_0)$.

- $\sigma(\mathcal{E}_4) = \sigma(\mathcal{E}_5)$ ist klar, da Komplemente offener Mengen abgeschlossen sind und umgekehrt.
- $\sigma(\mathcal{E}_5) = \sigma(\mathcal{E}_6)$: $\mathcal{E}_6 \subseteq \mathcal{E}_5$, also auch $\sigma(\mathcal{E}_6) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_5)$. Andererseits ist jedes $A \in \mathcal{E}_5$ Vereinigung der kompakten Mengen $A \cap [-n, n]$, $n \in \mathbb{N}$, also ist $\sigma(\mathcal{E}_5) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_6)$.
- $\sigma(\mathcal{E}_0) = \sigma(\mathcal{F}^1)$: Sei $]-\infty, r] \in \mathcal{E}_0$ für ein $r \in \mathbb{R}$, dann ist

  $$]-\infty, r[= \bigcup_{n=1}^{\infty} \underbrace{]-n, r]}_{\in \mathcal{F}^1} \in \sigma(\mathcal{F}^1),$$

  womit $\sigma(\mathcal{E}_0) \subseteq \sigma(\mathcal{F}^1)$ gezeigt ist. Sei andersherum $]r, s] \in \mathcal{F}^1$ für $r, s \in \mathbb{R}, r < s$, dann ist

  $$]r, s] =]-\infty, s] \setminus]-\infty, r] \in \sigma(\mathcal{E}_0),$$

  also $\sigma(\mathcal{F}^1) \subseteq \sigma(\mathcal{E}_0)$.

$\square$

11.1.7 Borel-σ-Algebren

Definition 11.1.6. Die vom Ring $\mathcal{F}^N$ erzeugte σ-Algebra heißt **Borel-σ-Algebra** auf $\mathbb{R}^N$, bezeichnet mit $\sigma(\mathcal{F}^N) = \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$. Ein Element $E = \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ heißt **Borel-Menge** oder **Borel-messbar**.

Bemerkung. Ist (X, d) ein metrischer Raum (oder allgemeiner $(X, \mathcal{T})$ ein topologische Raum), dann wird mit $\mathcal{B}(X) = \sigma(\{O \subseteq X \mid X \text{ offen}\})$ die **Borel'sche σ-Algebra** auf X definiert und die Elemente von $\mathcal{B}(X)$ heißen **Borel'sche Teilmengen**. Nicht jede Teilmenge des $\mathbb{R}^N$ ist eine Borelmenge (Beispiele folgen später).

Satz 11.1.7. Seien $E \subseteq \mathbb{R}^N$ eine Borelmenge und $\alpha \neq 0$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$, so sind auch $x_0 + E$ und $\alpha \cdot E$ Borelmengen.

Beweis. Setze $\mathcal{A}_0 = \big\{A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N) \mid x_0 + A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)\big\}$. $\mathcal{A}_0$ ist eine σ-Algebra:

i) $\emptyset = x_0 + \emptyset \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$, da $\emptyset \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$, also ist $\emptyset \in \mathcal{A}_0$.

ii) Seien $A, B \in \mathcal{A}_0$, d. h. A, B, $x_0 + A, x_0 + B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$, dann ist $(x_0 + A) \setminus (x_0 + B) = x_0 + (A \setminus B) \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$. Wegen $A \setminus B \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ ist $A \setminus B \in \mathcal{A}_0$.

iii) Seien $A_n \in \mathcal{A}_0$, $n \in \mathbb{N}$, d. h. A_n, $x_0 + A_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$, dann gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} (x_0 + A_n) = x_0 + \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$. Wegen $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}_0$.

$\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ ist klar. Da $\mathcal{F}^N \subseteq \mathcal{A}_0$ ist und $\mathcal{A}_0$ eine σ-Algebra ist, folgt $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N) = \sigma(\mathcal{F}^N) \subseteq \mathcal{A}_0$.

Nach demselben Muster zeigt man $\alpha \cdot E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ für alle $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Das einzige, was dabei gegebenenfalls unklar sein könnte, ist $(\alpha A) \setminus (\alpha B) = \alpha(A \setminus B)$ für beliebige $A, B \subseteq \mathbb{R}^N$:

$$\begin{aligned}
(\alpha A) \setminus (\alpha B) &= \big\{x \in \mathbb{R}^N \mid \exists\, a \in A \quad \forall\, b \in B \,:\, \alpha \cdot a \neq \alpha \cdot b \text{ und } x = \alpha \cdot a\big\} \\
&= \big\{x \in \mathbb{R}^N \mid \exists\, a \in A \quad \forall\, b \in B \,:\, a \neq b \text{ und } x = \alpha \cdot a\big\} \\
&= \big\{x \in \mathbb{R}^N \mid \exists\, a \in A \setminus B \,:\, x = \alpha \cdot a\big\} \\
&= \alpha(A \setminus B)
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung. Die im vorstehenden Beweis verwendete Strategie, auch das *Prinzip der guten Mengen* genannt, ist typisch:

Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra mit Erzeuger $\mathcal{E}$ und P eine Eigenschaft. Ist zu zeigen, dass $\forall\, A \in \mathcal{A} \,:\, P(A)$ gilt, so genügt es zu zeigen, dass

- $P(\mathcal{E})$ wahr ist und
- die Menge $\mathcal{A}_0 = \{A \in \mathcal{A} \mid P(A)\}$ aller „guten Mengen“ ein σ-Algebra ist.

Dann ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}_0$ und damit $\sigma(\mathcal{E}) = \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_0$, und wegen $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ folgt $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}$.

11.1.8 σ-Algebren und Abbildungen

Zunächst eine Schreibkonvention: Sei $Y \neq \emptyset$ eine Menge, $f : X \to Y$ eine Funktion und $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(Y)$, dann bezeichnen wir

$$f^{-1}(\mathcal{E}) := \left\{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{E}\right\}$$

Satz. Seien $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über einer Menge Y und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann ist $f^{-1}(\mathcal{A})$ eine σ-Algebra.

Beweis. Es ist $\emptyset = f^{-1}(\emptyset) \in f^{-1}(\mathcal{A})$, da $\emptyset \in \mathcal{A}$ ist. Die anderen beiden Eigenschaften sind klar, da f^{-1} mit den elementaren Mengenoperationen Komplementbildung und Vereinigung vertauscht. Exemplarisch für die Komplementbildung:

Seien $A \in f^{-1}(\mathcal{A})$, d. h. es gibt ein $B \in \mathcal{A}$ mit $A = f^{-1}(B)$. Dann ist $Y \setminus B \in \mathcal{A}$, also gilt

$$X \setminus A = X \setminus f^{-1}(B) = f^{-1}(Y \setminus B) \in f^{-1}(\mathcal{A})$$

$\square$

Satz. Seien $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über eine Menge X und $f : X \to Y$ eine Funktion. Dann ist $\mathcal{C} = \left\{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\right\}$ eine σ-Algebra über Y.

Beweis. $\emptyset \in \mathcal{C}$, denn $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{A}$, da $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist. Die anderen beiden sind nach der gleichen Bemerkung wie eben klar. Exemplarisch zeigen wir die Abgeschlossenheit bezüglich abzählbaren Vereinigungen:

Seien $B_n \in \mathcal{C}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann sind $f^{-1}(B_n) \in \mathcal{A}$, also auch

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} f^{-1}(B_n) = f^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \in \mathcal{A},$$

woraus sofort $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{C}$ folgt. $\square$

Satz. Seien $f : X \to Y$ eine Funktion und $\mathcal{E}$ der Erzeuger einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Y. Dann wird $f^{-1}(\mathcal{A})$ von $f^{-1}(\mathcal{E})$ erzeugt. Kurz gesagt gilt also: $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$.

Beweis. Da $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$ eine σ-Algebra ist, die wegen $\mathcal{E} \subseteq \sigma(\mathcal{E})$ die Mengen aus $f^{-1}(\mathcal{E})$ enthält, gilt $\sigma(f^{-1}(\mathcal{E})) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$.

Für die andere Inklusion betrachte die Menge

$$\mathcal{C} = \left\{B \subseteq Y \mid f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))\right\}$$

Wie eben gezeigt wurde, ist $\mathcal{C}$ eine σ-Algebra. Offensichtlich ist $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{C}$, also $\sigma(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{C}$ und damit $f^{-1}(\sigma(\mathcal{E})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{C}) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}))$. $\square$

11.1.9 Spur-σ-Algebren

Ähnlich wie wir früher Topologien auf Teilmengen einer Menge eingeschränkt haben („Spurtopologie"), macht es auch Sinn, „Spur-σ-Algebren" auf Teilmengen einer Menge zu definieren, auf der schon eine σ-Algebra definiert ist.

Definition 11.1.8. Sei $S \neq \emptyset$ eine Menge, $E \subseteq S$, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(S)$. Man nennt $\mathcal{E} \cap E := \{A \in \mathcal{P}(E) \mid \exists F \in \mathcal{E} : A = F \cap E\}$ die **Spur** von $\mathcal{E}$ auf E.

Insbesondere heißt $\mathcal{B}_0(E) = \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N) \cap E$ die **Borel-σ-Algebra von** E für jede Menge $E \subseteq \mathbb{R}^N$.

Bemerkung. Die Spur $\mathcal{A} \cap E$ einer σ-Algebra $\mathcal{A}$ auf E ist eine σ-Algebra, und es gilt allgemeiner

i) $\sigma(\mathcal{E} \cap E) = \sigma(\mathcal{E}) \cap E$

ii) Falls $E \subseteq \mathbb{R}^N$, dann wird $\mathcal{B}_0(E)$ von den relativ offenen Teilmengen von E erzeugt.

iii) Ist $E \subseteq \mathbb{R}^N$ eine Borelmenge, dann gilt $\mathcal{B}_0(E) = \big\{A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N) \mid A \subseteq E\big\}$.

Beweis. Seien $S \neq \emptyset$ eine Menge, $E \subseteq S$, $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(S)$.

i) Wir betrachten die kanonische Inklusionsabbildung $i : E \to S$. Beachtet man, dass $A \cap E = i^{-1}(A)$ für alle $A \subseteq S$ gilt, so sieht man für ein Mengensystem $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(S)$: $\mathcal{C} \cap E = i^{-1}(\mathcal{C})$. Nach einem Satz weiter oben gilt $\sigma(i^{-1}(\mathcal{E})) = i^{-1}(\sigma(\mathcal{E}))$, d. h. $\sigma(\mathcal{E} \cap E) = \sigma(\mathcal{E}) \cap E$.

ii) Per Definition ist $\mathcal{B}_0(E) = \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N) \cap E$. $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ wird von der Menge $\mathcal{T}$ der offenen Teilmengen von $\mathbb{R}^N$ erzeugt, d. h. $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N) = \sigma(\mathcal{T})$. $\mathcal{T}$ ist die Topologie von $\mathbb{R}^N$, die Unterraumtopologie auf E ist die Menge $\{O \cap E \mid O \in \mathcal{T}\} = \mathcal{T} \cap E$ der relativ offenen Teilmengen von E. Nach i) ist $\sigma(\mathcal{T}) \cap E = \sigma(\mathcal{T} \cap E)$, also wird $\mathcal{B}_0(E)$ tatsächlich von den relativ offenen Teilmengen von E erzeugt.

iii) „$\supseteq$" ist klar, da für $A \subseteq E$ gilt $A \cap E = A$. Sei nun $B \in \mathcal{B}_0(E)$, also gibt es ein $A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ mit $A \cap E = B$. Da aber auch $E \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ ist $B = A \cap E \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N)$ mit $B \subseteq E$. Dies zeigt „$\subseteq$".

□

11.1.10 Messbarer Raum

Definition 11.1.9. Sei $S \neq \emptyset$ eine Menge, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ eine σ-Algebra, so nennt man $(S, \mathcal{A})$ eine **messbaren Raum**. Ein Element $A \in \mathcal{A}$ heißt **$\mathcal{A}$-messbar**.

11.2 Inhalte und Maße

11.2.1 Definition

Konvention. Falls $a_n \in [0, +\infty]$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann schreibe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty,$$

falls die Reihe divergent, oder $a_N = +\infty$ für ein $N \in \mathbb{N}$.

Definition 11.2.1. Seien $\mathcal{R}$ ein Ring und $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ eine Funktion mit $\mu(\emptyset) = 0$.

i) μ heißt **endlich additiv** oder **Inhalt**, falls für je endlich viele paarweise disjunkte $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{R}$ gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

ii) μ heißt **σ-additiv** oder **Prämaß**, falls für je abzählbar viele paarweise disjunkte A_n, $n \in \mathbb{N}$ in $\mathcal{R}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

iii) Ein auf einer σ-Algebra definiertes Prämaß heißt **Maß**. Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über S und μ ein Maß auf $\mathcal{A}$, so heißt $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein **Maßraum**.

Bemerkung.

1. Falls aus dem Zusammenhang klar ist, von welcher σ-Algebra in iii) die Rede ist, so spricht man auch von einem Maß auf S.

2. Die Normierung $\mu(\emptyset) = 0$ dient nur dazu, den trivialen Fall eienr Mengenfunktion $\mu \equiv \infty$ außzuschließen. Die Bedingung „$\mu(\emptyset) = 0$“ ergibt sich für nicht-triviale endlich-additive Mengenfunktionen automatisch:

   Ist μ nicht trivial, so gibt es ein $A \in \mathcal{R}$ mit $\mu(A) < \infty$. Da $A = A \,\dot\cup\, \emptyset$ ist, folgt mit der endlichen Additivität

   $$+\infty > \mu(A) = \mu(A \cup \emptyset) = \mu(A) + \mu(\emptyset)$$

   also $\mu(\emptyset) = 0$.

3. Um die endliche Additivität zu überprüfen, reicht es, diese Bedingung für $n = 2$ zu zeigen.

4. Ein Maß μ auf einer σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ mit $\mu(S) = 1$ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**. $(S, \mathcal{A}, \mu)$ heißt dann **Wahrscheinlichkeitsraum**.

11.2.2 Beispiele

1. Seien $S \neq \emptyset$ eine beliebige Menge, $s \in S$ und $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(S)$ eine σ-Algebra. Dann wir durch

   $$\delta_s(A) = \begin{cases} 1, & \text{falls } s \in \mathcal{A}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

   ein Maß (sogar ein Wahrscheinlichkeitsmaß) auf $\mathcal{A}$ definiert, das sogenannte **Dirac-Maß**.

2. Sei $S \neq \emptyset$ eine endliche Menge, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(S)$; dann wird durch

$$\mu(A) = \frac{|A|}{|S|} \quad \forall\, A \subseteq S$$

ein (Wahrscheinlichkeits-)maß auf S definiert.

Als Anwendungsbeispiel betrachten wir $S = \{1, \ldots, 6\}$, was wir zum Beispiel als mögliche Ergebnisse beim Würfelexperiment mit einem Würfel interpretieren können. Definiert man also $P(A) = \frac{|A|}{|S|} = \frac{|a|}{6}$ für Teilmengen A von S, dann gilt speziell $P(\{i\}) = \frac{1}{6}$ für $i \in \{1, \ldots, 6\}$, was die Wahrscheinlichkeit ist, dass beim Würfeln mit fairem Würfel das Ergebnis „i" herauskommt. Weiter ist etwa $P(\{1,3,5\}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass man eine ungerade Zahl würfelt.

3. Sei $S = \mathbb{R}$. Die Länge eines halboffenen Intervalls $]a,b]$ ist $\lambda(]a,b]) = b - a$. Da jedes Element $A \in \mathcal{F}^1$ nach Lemma 11.1.2 als disjunkte Vereinigung

$$A = \underbrace{]a_1, b_1]}_{=I_1} \dot\cup \ldots \dot\cup \underbrace{]a_n, b_n]}_{=I_n}$$

geschrieben werden kann, ist es natürlich, der Menge A die Länge

$$\lambda(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda(]a_i, b_i]) = \sum_{i=1}^{n} b_i - a_i$$

zuzuordnen. Der Wert $\lambda(A)$ hängt dabei nicht von der gewählten Darstellung von A ab. Denn sei $A = J_1 \dot\cup \ldots \dot\cup J_m$ eine weitere Darstellung von A mit $J_k \in \mathcal{I}^1$, dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{m} \lambda(J_j) &= \sum_{j=1}^{m} \lambda(J_j \cap A) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \lambda\left(J_j \cap \dot{\bigcup_{i=1}^{n}} I_i\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \lambda\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} (J_j \cap I_i)\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda\left(J_j \cap I_i\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda(I_i),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichheit daraus resultiert, dass man mit einer analogen Gleichungskette zu der Doppelsumme gelangt, wenn man mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda(I_i)$ beginnt.

λ ist also ein wohldefinierter Inhalt auf $\mathcal{F}^1$, der sogenannte **Jordan-Inhalt**.

4. Sei allgemeiner $S = \mathbb{R}^N$ für ein $N \in \mathbb{N}$. Dann ist der natürliche Inhalt eines linkshalboffenen Quaders $]a,b] = \prod_{n=1}^{N}]\alpha_n, \beta_n]$ definiert durch

$$\lambda^N(]a,b]) = \prod_{n=1}^{N} \lambda(]\alpha_n, \beta_n]) = \prod_{n=1}^{N} (\beta_n - \alpha_n)$$

und $A \in \mathcal{F}^N$ mit der disjunkten Darstellung $A =]a_1, b_1] \,\dot{\cup}\, \ldots \,\dot{\cup}\,]a_p, b_p]$ wird in natürlicher Weise der Inhalt

$$\lambda^N(A) = \sum_{i=1}^{p} \lambda^N(]a_i, b_i])$$

zugeordnet. Dieser Wert ist wieder unabhängig von der Darstellung von A als disjunkte Vereinigung linkshalboffener Quader, was man wie oben zeigt. λ^N definiert folglich einen Inhalt auf $\mathcal{F}^N$, den man auch N**-dimensionalen Jordan-Inhalt** nennt.

11.2.3 Eigenschaften von Inhalten

Satz 11.2.2. Sei μ ein Inhalt auf dem Ring $\mathcal{R}$.

i) Wenn $A, B \in \mathcal{R}$, $A \subseteq B$, dann gilt $\mu(A) \le \mu(B)$, d. h. μ ist **monoton**.

ii) Sind $A_n \in \mathcal{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Mengen mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, dann gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \le \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$$

iii) Sind $A_n \in \mathcal{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ Mengen mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$ und ist μ sogar σ-additiv, dann gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \le \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

iv) Sind $A, B \in \mathcal{R}$ mit $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty$, dann gilt $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.

Beweis.

i) Schreibe $B = A \,\dot{\cup}\, (B \setminus A)$, dann folgt aus der endlichen Additivität von μ

$$\mu(B) = \mu(A \,\dot{\cup}\, (B \setminus A)) = \mu(A) + \underbrace{\mu(B \setminus A)}_{\ge 0} \ge \mu(A)$$

ii) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt, da μ endlich additiv,

$$\sum_{k=1}^{n} \mu(A_k) = \mu \underbrace{\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right)}_{\subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k} \overset{\text{i)}}{\le} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$$

Geht man zum Grenzwert für $n \to \infty$ über, so ergibt sich die Behauptung.

iii) Schreibe $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ als disjunkte Vereinigung mit

$$B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2), \ldots$$

Alle B_n sind Elemente von $\mathcal{R}$, und es ist dann

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} B_n,$$

und da μ σ-additiv und monoton ist, folgt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \mu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\,\underbrace{(B_n)}_{\subseteq A_n} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

iv) Es gilt wegen der endlichen Additivität: $\mu(B) = \mu(A \,\dot{\cup}\, (B \setminus A)) = \mu(A) + \mu(B \setminus A)$. Da $\mu(A) < \infty$ ist, darf man es auf beiden Seiten abziehen und erhält die Behauptung.

□

11.2.4 Kriterien für σ-Additivität

Zur Überprüfung eines Inhalts auf σ-Endlichkeit ist folgender Satz überaus nützlich

Satz 11.2.3. Sei μ ein Inhalt auf einem Ring $\mathcal{R}$. Dann gelten für die Aussagen

i) μ ist σ-additiv.

ii) Seien $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \ldots$ Elemente von $\mathcal{R}$ mit $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, so gilt $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ („μ ist stetig von unten“).

iii) Seien $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ Elemente von $\mathcal{R}$ mit $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$, so gilt $\mu(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n)$ („μ ist stetig von oben“).

iv) Sind $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$ Elemente von $\mathcal{R}$ mit $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, so gilt $\mu(A) = 0$ („μ ist stetig von oben in $\emptyset$“).

die Implikationen (i) $\Leftrightarrow$ (ii) $\Leftarrow$ (iii) $\Leftrightarrow$ (iv). Fordert man zusätzlich $\mu(A_N) < \infty$ für ein $N \in \mathbb{N}$ in (iii), so gilt (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Bemerkung. Ist sogar $\mu(A) < \infty$ für alle $A \in \mathcal{R}$, dann sind die vier Aussagen äquivalent.

Beweis.

i) $\Rightarrow$ ii) Seien A und A_n wie in ii). Schreibe wieder A als disjunkte Vereinigung $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, wobei $B_1 = A_1, B_2 = A_2 \setminus A_1, \ldots$. Dann ist

$$\mu(A) = \mu\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \mu(B_k)}_{=\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = A_n} = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n),$$

wobei für das zweite Gleichheitszeichen die σ-Additivität ausgenutzt wurde.

ii) $\Rightarrow$ i) Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ eine Folge disjunkter Mengen mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{R}$. Betrachte nun $A_n := \bigcup_{k=1}^{n} B_k$ für alle $n \in \mathbb{N}$. dann ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in $\mathcal{R}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. Somit folgt aus ii)

$$\begin{aligned}\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \mu(B_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(B_k)\end{aligned}$$

iii) $\Rightarrow$ iv) ist klar.

iv) $\Rightarrow$ iii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ eine absteigende Folge mit $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$. Ist $\mu(A) = \infty$, dann ist wegen der Monotonie und $A \subseteq A_n$ auch schon $\mu(A_n) = \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und die Behauptung ist trivialerweise erfüllt. Sei also im Folgenden $\mu(A) < \infty$.

Dann betrachte $B_n := A_n \setminus A \in \mathcal{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Klar ist: $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine absteigende Folge in $\mathcal{R}$ mit

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A_n \setminus A) = \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) \setminus A = \emptyset$$

Somit folgt nach iv)

$$\begin{aligned}0 &= \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n \setminus A)\\ &= \lim_{n\to\infty} (\mu(A_n) - \mu(A)) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) - \mu(A),\end{aligned}$$

woraus durch Umstellen die Behauptung folgt (beachte $\mu(A) < \infty$).

iii) $\Rightarrow$ ii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufsteigende Folge in $\mathcal{R}$ mit $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{R}$. Dann ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert duch $B_n = A \setminus A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ eine absteigende Folge in $\mathcal{R}$ mit

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} (A \setminus A_n) = A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$$

Nach iii) gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$. Mit

$$\mu(A) = \mu(A_n) + \mu(A \setminus A_n) = \mu(A_n) + \mu(B_n)$$

folgt durch Grenzübergang für $n \to \infty$: $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$

ii) $\Rightarrow$ iii) , wenn ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\mu(A_N) < \infty$. Betrachte dann wie eben die aufsteigende Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ definiert durch $B_n = A_N \setminus A_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_N \setminus A_n) = A_N \setminus \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = A_N \setminus A$$

Mit ii) folgt wegen $\mu(A) \leq \mu(A_n) \leq \mu(A_N) < \infty$ für alle $n \geq N$

$$\begin{aligned}\mu(A_N) - \mu(A) = \mu(A_N \setminus A) &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(B_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_N \setminus A_n) \\ &= \lim_{n\to\infty} \mu(A_N) - \mu(A_n) = \underbrace{\mu(A_N)}_{<\infty} - \underbrace{\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)}_{<\infty}\end{aligned}$$

Also gilt: $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$.

□

11.2.5 Der Jordan-Inhalt ist σ-additiv

Satz 11.2.4. Der N-dimensionale Jordan-Inhalt λ^N ist σ-additiv auf $\mathcal{F}^N$.

Beweis. Wir zeigen, dass die Bedingung iv) aus Satz 11.2.3 gilt. Sei also $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge in $\mathcal{F}^N$ mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Sei $\epsilon > 0$ vorgelegt. Wähle dann zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $B_n \in \mathcal{F}^N$ mit $B_n \subseteq \overline{B}_n \subseteq A_n$ und $\lambda^N(A_n \setminus B_n) \leq \frac{\epsilon}{2^n}$ (diese erhält man zum Beispiel, in dem man aus genügend feinen Zerlegungen der endlich vielen Quader, aus denen A_n besteht, alle Unterquader entfernt, die am Rand von A_n liegen). Klar ist: $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{B}_n = \emptyset$.

Da $\overline{B}_n \subseteq \overline{A}_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, und $\overline{A}_1$ beschränkt (als Abschluss einer endlichen Vereinigung endlich vieler Quader), also kompakt ist, gibt es aber schon endlich viele $i_1, \ldots, i_p \in \mathbb{N}$ mit $\bigcap_{k=1}^{p} \overline{B}_{i_k} = \emptyset$. Das ist klar, da $\left(\overline{A}_1 \setminus \overline{B}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine (in $\overline{A}_1$) offene Überdeckung von $\overline{A}_1$ ist.

Wir zeigen nun induktiv, dass

$$\lambda^N\left(A_n \setminus \bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) \leq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\epsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt. Daraus folgt für $n \geq \max\{i_1, \ldots, i_p\}$

$$\lambda^N\left(A_n \setminus \bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) = \lambda^N(A_n) \leq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\epsilon < \epsilon$$

Der Induktionsanfang für $n = 1$ folgt sofort nach Wahl der B_n: $\lambda^N(A_1 \setminus B_1) \leq \frac{\epsilon}{2} = (1 - \frac{1}{2})\epsilon$. Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ betrachte

$$\begin{aligned}\lambda^N\left(A_{n+1} \setminus \bigcap_{k=1}^{n+1} B_k\right) &= \lambda^N\left(\left(A_{n+1} \setminus \bigcap_{k=1}^{n} B_k\right) \cup (A_{n+1} \setminus B_{n+1})\right) \\ &\leq \lambda^N \underbrace{\left(A_{n+1} \setminus \bigcap_{k=1}^{n} B_k\right)}_{\subseteq A_n \setminus \bigcap_{k=1}^{n} B_k} + \underbrace{\lambda^N\left(A_{n+1} \setminus B_{n+1}\right)}_{\leq \frac{\epsilon}{2^{n+1}}} \\ &\leq \left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\epsilon + \frac{\epsilon}{2^{n+1}} = \left(1 - \frac{1}{2^{n-1}}\right)\epsilon\end{aligned}$$

□

11.3 Konstruktion von Maßen und insbesondere des Lebesgue-Maßes auf $\mathbb{R}^N$

11.3.1 Konstruktion in drei Schritten

1. Schritt: Fortsetzung eines gegebenen Inhalts μ auf einem Ring $\mathcal{R}$ über einer Menge S zu einem äußeren Maß μ^* auf $\mathcal{P}(S)$.
2. Schritt: Einschränkung von μ^* auf eine geeignete, kleinere σ-Algebra $\mathcal{M}_{\mu^*}$ (die sogenannten μ^*-messbaren Teilmengen $\subseteq \mathcal{P}(S)$) und Nachweis, dass $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ ein Maß darauf ist.
3. Schritt: Zeige, dass - falls μ σ-additiv ist - gilt: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ und $\mu^*(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

11.3.2 Äußere Maße

Definition 11.3.1. Sei $S \neq \emptyset$. Eine Abbildung $\mu^* : \mathcal{P}(S) \to [0, +\infty]$ heißt **äußeres Maß**, falls

i) $\mu^*(\emptyset) = 0$

ii) Ist $A \subseteq B$, dann folgt $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$, d. h. μ^* ist monoton.

iii) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(S)$ gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

d. h. μ^* ist subadditiv.

Satz 11.3.2. Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein Ring, $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ ein Inhalt. Für $A \subseteq S$ sei

$$\mu^*(A) := \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \mid (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R} \text{ und } A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right\},$$

wobei $\inf \emptyset = +\infty$ gesetzt wird. Dann ist μ^* ein äußeres Maß auf $\mathcal{P}(S)$.

Beweis.

i) ist klar: $\mu^*(\emptyset) = \mu(\emptyset) = 0$.

ii) μ^* ist monoton, weil μ monoton ist.

iii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(S)$. O. B. d. A. sei $\mu^*(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn ansonsten ist die Ungleichung trivial.

Sei nun $\epsilon > 0$ vorgelegt. Dann existiert zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Folge $\left(E_k^{(n)}\right)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $A_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k^{(n)}$ und

$$\mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n} \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(E_k^{(n)}\right)$$

Nun ist aber

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n,k\in\mathbb{N}} E_k^{(n)}$$

und somit nach Definition von μ^*

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(E_k^{(n)}\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mu^*(A_n) + \frac{\epsilon}{2^n}\right) = \epsilon + \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n)$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, folgt die Behauptung.

□

11.3.3 μ^*-Messbarkeit

Definition 11.3.3. Sei $\mu^* : \mathcal{P}(S) \to [0, +\infty]$ ein äußeres Maß. Dann heißt $A \subseteq S$ **μ^*-messbar**, falls gilt

$$\forall\, D \subseteq S: \ \mu^*(D) = \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \cap A^c)$$

Bemerkung. Es genügt, $\mu^*(D) \geq \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \cap A^c)$ zu fordern, da die andere Ungleichung aus der Subadditivität von μ^* folgt

Wir wollen diese Definition über den Jordan-Inhalt λ^N auf $\mathbb{R}^N$ motivieren. $\left(\lambda^N\right)^*(A)$ ist „äußeres Maß von A"

Ein „inneres Maß von A" könnte man durch $\left(\lambda^N\right)_*(A) = \left(\lambda^N\right)^*(D) - \left(\lambda^N\right)^*(D \backslash A)$ definieren. In Anlehnung an die Definition einer Jordan-messbaren Menge sollte eine $\left(\lambda^N\right)^*$-messbare Menge

$$\left(\lambda^N\right)^*(A) = \left(A^N\right)_*(A) = \left(\lambda^N\right)^*(D) - \left(\lambda^N\right)^*(D \setminus A)$$

also $\left(\lambda^N\right)^*(D) = \left(\lambda^N\right)^*(A) + \left(\lambda^N\right)^*(D \cap A^c)$ erfüllen.

Satz 11.3.4. Sei μ^* ein äußeres Maß auf S. Dann ist

$$\mathcal{M}_{\mu^*} = \{A \subseteq S \mid A \quad \mu^*\text{-messbare Menge}\}$$

eine σ-Algebra und $\mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}}$ ist ein Maß auf $\mathcal{M}_{\mu^*}$.

Beweis. Zeige zunächst, dass $\mathcal{M}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra ist.

i) Klar: $\emptyset \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, denn $\mu^*(D) = 0 + \mu^*(D) = \mu^*(D \cap \emptyset) + \mu^*(D \cap \emptyset^c)$.

ii) Da die Definition von μ^*-Messbarkeit symmetrisch in A und A^c ist, ist auch klar, dass aus $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ folgt: $A^c \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

iii) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$. Wir zeigen zunächst, dass mit $A, B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ auch $A \cup B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ folgt. Da A μ^*-messbar ist, gilt für alle $D \subseteq S$

$$\mu^*(D) = \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \cap A^c)$$

Da B μ^*-messbar ist, gilt

$$\mu^*(D \cap A^c) = \mu^*((D \cap A^c) \cap B) + \mu^*((D \cap A^c) \cap B^c)$$

Somit gilt

$$\begin{aligned}
\mu^*(D) &= \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \cap A^c) \\
&= \mu^*(D \cap A) + \mu^*((D \cap A^c) \cap B) + \mu^*(D \cap (A \cup B)^c) \\
&\geq \mu^*((D \cap A) \cup (D \cap A^c \cap B)) + \mu^*(D \cap (A \cup B)^c) \\
&= \mu^*(D \cap (A \cup (A^c \cap B))) + \mu^*(D \cap (A \cup B)^c)
\end{aligned}$$

Nun gilt $D \cap (A \cup (A^c \cap B)) = D \cap ((A \cup A^c) \cap (A \cup B)) = D \cap (A \cup B)$, also

$$\mu^*(D) \geq \mu^*(D \cap (A \cup B)) + \mu^*(D \cap (A \cup B)^c)$$

Da $D \subseteq S$ beliebig war, folgt $A \cup B \in \mathcal{M}_{\mu^*}$. $\mathcal{M}_{\mu^*}$ ist also eine Algebra.

Betrachte nun eine disjunkte Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$. Da A_1 μ^*-messbar ist, gilt für beliebige $D \subseteq S$

$$\begin{aligned}
\mu^*((A_1 \cup A_2) \cap D) &= \mu^*(((A_1 \cup A_2) \cap D) \cap A_1) + \mu^*(((A_1 \cup A_2) \cap D) \cap A_1^c) \\
&= \mu^*(A_1 \cap D) + \mu^*(A_2 \cap D),
\end{aligned}$$

da $A_1 \cap A_2 = \emptyset$. Mittels vollständiger Induktion folgt

$$\mu^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right) \cap D\right) = \sum_{k=1}^n \mu^*\left(A_k \cap D\right) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (*)$$

Wir wissen bereits, dass $\mathcal{M}_{\mu^*}$ eine Algebra ist und somit $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h.

$$\mu^*(D) = \mu^*\left(D \cap \bigcup_{k=1}^n A_k\right) + \mu^*\left(D \cap \left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)^c\right)$$

Mit $(*)$ und wegen der Monotonie von μ^* gilt

$$\mu^*(D) \geq \sum_{k=1}^n \mu^*(A_k \cap D) + \mu^*\left(D \cap \left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right)^c\right)$$

(man beachte $\left(\bigcup_{k=1}^n A_k\right)^c \supseteq \left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right)^c$). Für $n \to \infty$ also

$$\begin{aligned}
\mu^*(D) &\geq \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A_k \cap D) + \mu^*\left(D \cap \left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right)^c\right) \qquad (**) \\
&\geq \mu^*\left(D \cap \bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) + \mu^*\left(D \cap \left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right)^c\right),
\end{aligned}$$

wobei die letzte Ungleichung aus der Subadditivität von μ^* folgt. Da $D \subseteq S$ beliebig war, folgt $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{M}_{\mu^*}$.

Da für jede beliebige Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ die Vereinigung $\bigcup_{n=1}^\infty A_k$ als Vereinigung einer disjunkten Folge $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ geschrieben werden kann, ist damit gezeigt, dass $\mathcal{M}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra ist.

Die σ-Additivität von μ^* auf $\mathcal{M}_{\mu^*}$ folgt aus $(**)$, wenn man $D = \bigcup_{k=1}^\infty A_k$ setzt:

$$\begin{aligned}
\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) &\geq \sum_{k=1}^\infty \mu^*\left(A_k \cap \bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) + \mu^*\left(\left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^\infty A_k\right)^c\right) \\
&\geq \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A_k) + \mu^*(\emptyset) = \sum_{k=1}^\infty \mu^*(A_k)
\end{aligned}$$

□

11.3.4 Fortsetzungssatz von Carathéodory

Wir zeigen nun, dass μ^* tatsächlich Fortsetzung von μ auf $\mathcal{M}_{\mu^*}$ mit $\mathcal{M}_{\mu^*} \supseteq \mathcal{R}$, wenn nur zusätzlich gilt, dass $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ σ-additiv ist.

Satz 11.3.5 (Forsetzungssatz von Carathéodory)**.** Sei $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{P}(S)$ ein Ring, $S \neq \emptyset$ eine Menge, $\mu : \mathcal{R} \to [0,\infty]$ ein Prämaß. Dann gilt $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ und $\mu(A) = \mu^*(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst: $\mu(A) = \mu^*(A) \quad \forall A \in \mathcal{R}$. Da $(A_n)_n = (A, \emptyset, \emptyset, \dots)$ eine Folge in $\mathcal{R}$ mit $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ ist, folgt $\mu^*(A) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$. Falls $\mu^*(A) = +\infty$, folgt sofort $\mu^*(A) = \mu(A)$. O. B. d. A. dürfen wir also annehmen, dass eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ existiert mit $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$.

Es ist $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)$, und, da μ σ-additiv ist, folgt mit Satz 11.2.2 iii)

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap A_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\underbrace{A \cap A_n}_{\subseteq A_n}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Bildet man nun das Infimum über alle zulässigen Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, dann folgt $\mu(A) \leq \mu^*(A)$. Zusammen mit der anderen Ungleichung hat man also $\mu(A) = \mu^*(A)$ für alle $A \in \mathcal{R}$.

Zeige nun noch: $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$. Seien also $A \in \mathcal{R}$ und $D \subseteq S$. Zu zeigen ist:

$$\mu^*(D) \geq \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \cap A^c)$$

Falls $\mu^*(D) = \infty$, ist nichts mehr zu zeigen. Wir dürfen also annehmen, dass eine Mengenfolge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ existiert mit $D \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$. Wegen

$$D \cap A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\underbrace{A_n \cap A}_{\in\mathcal{R}}\right), \quad D \cap A^c \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left(\underbrace{A_n \cap A^c}_{\in\mathcal{R}}\right)$$

hat man also zulässige Überdeckungen von $D \cap A$ und $D \cap A^c$, sodass gilt

$$\begin{aligned}
\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mu(A_n \cap A) + \mu(A_n \cap A^c)\right) \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A) + \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n \cap A^c) \\
&\geq \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \cap A^c)
\end{aligned}$$

Bildet man das Infimum über alle zulässigen Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $D \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, so folgt

$$\mu^*(D) \geq \mu^*(D \cap A) + \mu^*(D \cap A^c)$$

Damit folgt $A \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, d. h. $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$. □

11.3.5 σ-Endlichkeit

Natürlich stellt sich die Frage, ob die so gefundene Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ eindeutig bestimmt ist. Im Allgemeinen ist das nicht der Fall; fordert man aber, dass μ zusätzlich „σ-endlich" ist, dann fällt die Antwort positiv aus.

Definition 11.3.6. Seien $S \neq \emptyset$ eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring über S und $\mu : \mathcal{R} \to [0, \infty]$ ein Inhalt. Dann heißt μ **σ-endlich**, wenn eine aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ existiert so, dass $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Bemerkung. Die Bedingung, dass die Folge aufsteigend ist, kann fallengelassen werden, denn man kann zu $(\bigcup_{k=1}^{n} A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ übergehen.

Der N-dimensionale Jordan-Inhalt $\lambda^N : \mathcal{F}^N \to [0, \infty]$ ist beispielsweise σ-endlich. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ wählt man einfach $A_n = [-n, n]$ und erhält so eine Folge mit den gewünschten Eigenschaften.

11.3.6 Eindeutigkeit der Fortsetzung

Satz 11.3.7. Zusätzlich zu den Voraussetzungen von Satz 11.3.5 möge μ σ-endlich sein. Dann ist $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ die eindeutig bestimmte Fortsetzung von μ zu einem Maß auf $\sigma(\mathcal{R})$ und $\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}$ ist ebenfalls σ-endlich.

Im Beweis benutzen wir folgendes

Lemma 11.3.8. Sei $\mathcal{A}$ eine Algebra über einer Menge $S \neq \emptyset$. Dann gilt $\sigma(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A})$, wobei $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ die von $\mathcal{A}$ erzeugte monotone Klasse ist (d. h. die kleinste monotone Klasse, die $\mathcal{A}$ umfasst). Hierbei heißt ein Mengensystem $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{P}(S)$ **monotone Klasse**, falls gilt:

i) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ eine absteigende Folge, dann gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

ii) Ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}$ eine aufsteigende Folge, dann gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}$.

Beweis. Bemerke zunächst, dass $\sigma(\mathcal{A})$ eine monotone Klasse ist, die $\mathcal{A}$ umfasst. Somit ist klar: $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \sigma(\mathcal{A})$.

Bemerke weiterhin, dass es reicht zu zeigen, dass $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ eine Algebra ist. Denn dann folgt

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A}) \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

und da dies eine aufsteigende Folge ist:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

$\mathcal{M}(\mathcal{A})$ ist also sogar eine σ-Algebra. Da $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$ gilt, folgt somit $\sigma(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{M}(\mathcal{A})$. Zeige also, dass $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ eine Algebra ist.

$\emptyset, S \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ ist klar. Für ein $F \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ setze

$$\mathcal{B}(F) = \{E \subseteq S \mid E \setminus F, F \setminus E, F \cup E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})\}$$

$\mathcal{B}(F)$ ist eine monotone Klasse, denn sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(F)$ eine aufsteigende Folge mit $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, dann ist $A \setminus F, F \cup A \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, wie man leicht einsieht. Außerdem gilt

$$F \setminus A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \underbrace{(F \setminus A_n)}_{\in \mathcal{M}(\mathcal{A})} \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$$

Also gilt $A \in \mathcal{B}(F)$. Analog zeigt man für eine absteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}(F)$, dass $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{B}(F)$ gilt.

Wenn $F \in \mathcal{A}$, dann gilt $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(F)$, denn $\mathcal{A}$ ist eine Algebra. Da $\mathcal{B}(F)$ eine monotone Klasse ist, gilt in diesem Fall also $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}(F)$.

Sei nun $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, dann gilt also $E \in \mathcal{B}(F)$ für $F \in \mathcal{A}$. Wegen der Symmetrie der Definition von $\mathcal{B}(F)$ gilt dann aber auch $F \in \mathcal{B}(E)$, und da $\mathcal{B}(E)$ eine monotone Klasse ist folgt $\mathcal{M}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{B}(E)$. Da dies für beliebige $E \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$ gilt, ist $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ eine Algebra. □

Nun zum Beweis des Satzes.

Beweis. Seien μ_1, μ_2 zwei beliebige Fortsetzungen von μ auf $\sigma(\mathcal{R})$ zu einem Maß. Nach Voraussetzung ist μ σ-endlich, d. h. es gibt eine aufsteigende Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{R}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = S$ und $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Betrachte nun für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathcal{R}_n = \mathcal{R} \cap A_n = \{A \cap A_n \mid A \in \mathcal{R}\}$. Da $\mathcal{R}$ ein Ring ist und $A_n \in \mathcal{R}$, folgt sofort, dass $\mathcal{R}_n$ eine Algebra über A_n ist. Wir wollen zeigen, dass $\mu_1 = \mu_2$ auf $\sigma(\mathcal{R}_n)$ gilt. Betrachte hierzu

$$\mathcal{T}_n := \{E \in \sigma(\mathcal{R}_n) \mid \mu_1(E) = \mu_2(E)\}$$

Dann gilt:

- $\mathcal{R}_n \subseteq \mathcal{T}_n$, da $\mu_1 = \mu_2$ auf $\mathcal{R} \supseteq \mathcal{R}_n$ gilt.
- $\mathcal{T}_n$ ist eine monotone Klasse, denn μ_1, μ_2 sind als endliche Maße auf $\sigma(\mathcal{R}_n)$ stetig von oben und stetig von unten.

Nach Lemma 11.3.8 ist folglich $\sigma(\mathcal{R}_n) = \mathcal{M}(\mathcal{R}_n) \subseteq \mathcal{T}_n$. Das heißt aber gerade $\mu_1 = \mu_2$ auf $\sigma(\mathcal{R}_n)$. Da für jedes $E \in \sigma(\mathcal{R})$

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)$$

gilt, und $E \cap A_n \in \sigma(\mathcal{R}) \cap A_n = \sigma(\mathcal{R} \cap A_n) = \sigma(\mathcal{R}_n)$, folgt mit der Stetigkeit von unten für Maße, dass

$$\mu_1(E) = \lim_{n\to\infty} \mu_1(E \cap A_n) = \lim_{n\to\infty} \mu_2(E \cap A_n) = \mu_2(E)$$

□

11.3.7 Borel- und Lebesgue-Maß

Korollar. Der Jordan-Inhalt $\lambda^N : \mathcal{F}^N \to [0, \infty]$ besitzt eine eindeutige Fortsetzung zu einem σ-endlichen Maß $(\lambda^N)^*|_{\sigma(\mathcal{F}^N)}$ - im Folgenden weiter mit λ^N bezeichnet - auf $\mathcal{B}_0(\mathbb{R}^N) = \sigma(\mathcal{F}^N)$.

Beweis. λ^N ist σ-additiv und σ-endlich. Die Behauptung folgt aus den Sätzen 11.3.5 und 11.3.7. $\square$

Bezeichnung. Diese Fortsetzung wird als **Borel-Lebesgue-Maß** oder **Borel-Maß** auf $\mathbb{R}^N$ bezeichnet. Die Mengen in $\mathcal{B}_N := \mathcal{B}_0(\mathcal{R}^N)$ werden als **Borel-messbare Mengen** bezeichnet.

Tatsächlich liefert der Fortsetzungssatz mehr: λ^N besitzt sogar eine Fortsetzung zu einem Maß $\left(\lambda^N\right)^*$ auf $\mathcal{M}_{(\lambda^N)^*}$, der σ-Algebra aller $\left(\lambda^N\right)^*$-messbaren Teilmengen von $\mathbb{R}^N$. Man nennt $\mathcal{L}_N := \mathcal{M}_{(\lambda^N)^*}$ die Menge der **Lebesgue-messbaren Mengen** und bezeichnet $\left(\lambda^N\right)^*|_{\mathcal{L}_N}$ als **Lebesgue-Maß** auf $\mathbb{R}^N$. Man schreibt meist vereinfachend $\lambda^N = \left(\lambda^N\right)^*|_{\mathcal{L}_N}$.

11.3.8 Vollständigkeit

Wie viel „größer" ist $\mathcal{L}_N$ als $\mathcal{B}_N$? Wir werden gleich sehen, dass

$$\mathcal{L}_N = \left\{A \cup N \mid A \in \mathcal{B}_N,\, \exists\, M \in \mathcal{B}_N \,:\, N \subseteq M \text{ und } \lambda^N(M) = 0\right\}$$

gilt, d. h. zu $\mathcal{B}_N$ kommen Teilmengen von Borel-Nullmengen und Vereinigungen von Borel-Mengen mit diesen. $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, \lambda^N)$ ist die sogenannte Vervollständigung des Maßraums $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_N, \lambda^N)$.

Definition 11.3.9. Seien $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra und $\lambda : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ ein Maß. Dann heißt $\mathcal{A}$ **vollständig** bezüglich λ, falls gilt

$$\forall\, E \in \mathcal{A},\, \lambda(E) = 0 \,:\, F \subseteq E \Rightarrow F \in \mathcal{A} \text{ (und } \lambda(F) = 0)$$

(wobei der Zusatz wegen der Monotonie von λ klar ist). λ heißt in diesem Fall **vollständiges Maß** auf $\mathcal{A}$ und $(S, \mathcal{A}, \mu)$ heißt **vollständiger Maßraum**.

Bemerkung. Unter den Annahmen des Fortsetzungssatzes gilt: $(S, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ ist ein vollständiger Maßraum.

Beweis. Sei $E \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ mit $\mu^*(E) = 0$ und sei $F \subseteq E$. Zu zeigen ist: $F \in \mathcal{M}_{\mu^*}$, d. h.

$$\forall\, D \subseteq S \,:\, \mu^*(D) \geq \mu^*(D \cap F) + \mu^*(D \cap F^c)$$

Sei also $D \subseteq S$ beliebig, dann gilt

$$\left.\begin{array}{r} \mu^*(D) \geq \mu^*(D \cap F^c) \\ \mu^*(D \cap F) \leq \mu^*(E) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \mu^*(D) \geq \mu^*(D \cap F) + \mu^*(D \cap F^c)$$

$\square$

Ein nicht-vollständiger Maßraum $(S, \mathcal{A}, \mu)$ kann stets „vervollständigt" werden.

Satz 11.3.10. Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein beliebiger Maßraum. Dann ist

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N \mid A \in \mathcal{A},\, N \subseteq M \text{ für ein } M \in \mathcal{A} \text{ mit } \mu(M) = 0\}$$

eien $\mathcal{A}$ umfassende σ-Algebra und

$$\begin{aligned} \overline{\mu} : \overline{\mathcal{A}} &\to [0, \infty] \\ A \cup N &\mapsto \mu(A) \end{aligned}$$

ist ein vollständiges Maß auf $\overline{A}$. Der Maßraum $(S, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ heißt **Vervollständigung** von $(S, \mathcal{A}, \mu)$.

Bemerkung. $(S, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\mu})$ ist die kleinste vollständige Erweiterung von $(S, \mathcal{A}, \mu)$.

Beweis des Satzes. Zeige: $\overline{\mathcal{A}}$ ist eine Algebra:

i) $\emptyset \in \overline{\mathcal{A}}$ ist klar, denn $\mathcal{A} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$.

ii) Sei $B \in \overline{\mathcal{A}}$, d. h. es gibt $A, M \in \mathcal{A}$ mit $\mu(M) = 0$ und ein $N \subseteq M$ so, dass $B = A \cup N$. Dann gilt

$$\begin{aligned} B^c &= (A \cup N)^c \\ &= A^c \cap N^c \\ &= A^c \cap ((M \setminus N) \cup (S \setminus M)) \\ &= (A^c \cap (M \setminus N)) \cup (A^c \cap M^c) \\ &= (A^c \cap (M \setminus N)) \cup (A \cup M)^c \end{aligned}$$

Nun ist aber $(A \cup M)^c \in \mathcal{A}$, weil $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra ist, und $A^c \cap (M \setminus N) \subseteq M \setminus N \subseteq M$ mit $\mu(M) = 0$, also $B \in \overline{\mathcal{A}}$.

iii) Sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$ gegeben, d. h. es gibt $A_n \in \mathcal{A}$, $N_n \subseteq M_n$ mit $M_n \in \mathcal{A}$ und $\mu(M_n) = 0$ so, dass $B_n = A_n \cup N_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Aber dann ist

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cup N_n) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \right),$$

wobei $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \in \mathcal{A}$ und $\bigcup_{n=1}^\infty N_n \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty \in \mathcal{A}$ mit $0 \leq \mu(\bigcup_{n=1}^\infty M_n) \leq \sum_{n=1}^\infty \mu(M_n) = 0$, also $\bigcup_{n=1}^\infty B_n \in \overline{\mathcal{A}}$.

Zeige nun die Wohldefiniertheit von μ. Seien dazu $B \in \mathcal{A}$ mit $B = A_1 \cup N_1 = A_2 \cup N_2$ mit $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$, $N_1 \subseteq M_1$, $N_2 \subseteq M_2$, wobei $M_1, M_2 \in \mathcal{A}$ mit $\mu(M_1) = \mu(M_2) = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mu(A_1) = \mu^*(A_1) &\leq \mu^*(A_1 \cup N_1) = \mu^*(A_2 \cup N_2) \\ &\leq \mu^*(A_2 \cup M_2) \leq \mu^*(A_2) + \mu^*(M_2) = \mu^*(A_2), \end{aligned}$$

wobei ausgenutzt wurde, dass μ^* ein äußeres Maß ist und $= \mu$ auf $\mathcal{A}$ gilt. Aus Symmetriegründen folgt ebenso $\mu(A_2) \leq \mu(A_1)$, also insgesamt $\mu(A_1) = \mu(A_2)$, was die Wohldefiniertheit zeigt.

$\overline{\mu}$ ist ein Maß, denn es gilt:

i) Allgemein ist $\overline{\mu}(A) = \mu(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}$, also insbesondere $\overline{\mu}(\emptyset) = 0$.

ii) Sei $(B_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{\mathcal{A}}$ eine paarweise disjunkte Folge von Mengen, d. h. es gibt $A_n \in \mathcal{A}$, $N_n \subseteq M_n$ alle paarweise disjunkt mit $M_n \in \mathcal{A}$ und $\mu(M_n) = 0$ so, dass $B_n = A_n \cup N_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \overline{\mu}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) &= \overline{\mu}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n \right) \right) \\ &= \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(A_n \cup N_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\mu}(B_n) \end{aligned}$$

Schließlich ist $\overline{\mu}$ ein vollständiges Maß, denn sei $E \in \overline{\mathcal{A}}$ mit $\overline{\mu}(E) = 0$ und $F \subseteq E$. Dann gibt es ein $A \in \mathcal{A}$ mit $E = A \cup N$ für ein $N \subseteq M$ mit $M \in \mathcal{A}$ und $\mu(M) = 0$. Es ist

$$0 \leq \mu(A) = \overline{\mu}(A) \leq \overline{\mu}(A \cup N) = \mu(E) = 0,$$

also auch $\mu(A \cup M) = 0$, womit $F = \emptyset \cup F \in \overline{\mathcal{A}}$ wegen $\emptyset \in \mathcal{A}$ und $F \subseteq E \subseteq A \cup M$, $A \cup M \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A \cup M) = 0$. □

Satz 11.3.11. Unter den Voraussetzungen des Fortsetzungssatzes (Satz 11.3.5) und denen des Satzes 11.3.7 über die Eindeutigkeit der Fortsetzung gilt:

$(S, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*|_{\mathcal{M}_{\mu^*}})$ ist Vervollständigung des Maßraumes $(S, \sigma(\mathcal{R}), \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})})$. Insbesondere: $(\mathbb{R}^N, \mathcal{L}_N, \lambda^N)$ ist Vervollständigung von $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}_N, \lambda^N)$.

Beweis. Es ist also zu zeigen: $(S, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*) = (S, \overline{\sigma(\mathcal{R})}, \overline{\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}})$. „$\supseteq$" ist klar, da $(S, \mathcal{M}_{\mu^*}, \mu^*)$ ein vollständiger Maßraum ist, der $(S, \sigma(\mathcal{R}), \mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})})$ umfasst, und $(S, \overline{\sigma(\mathcal{R})}, \overline{\mu^*|_{\sigma(\mathcal{R})}})$ der kleinste ist, für den das gilt.

Es reicht zu zeigen, dass $\mathcal{M}_{\mu^*} \subseteq \overline{\sigma(\mathcal{R})}$ gilt. Wir zeigen zunächst, dass für $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ mit $\mu^*(E) < \infty$ auch $E \in \overline{\sigma(\mathcal{R})}$ gilt und benutzen im Anschluss die σ-Endlichkeit, um das Ergebnis auf ganz $\mathcal{M}_{\mu^*}$ auszudehnen.

Nach der Definition von μ^* existiert zu $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine Menge $F_n \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $E \subseteq F_n$ und $\mu^*(F_n) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{n}$. Dann gilt

$$E \subseteq \bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n =: F \in \sigma(\mathcal{R}) \text{ und } \mu^*(E) \leq \mu^*(F) \leq \mu^*(F_n) \leq \mu^*(E) + \frac{1}{n} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Geht man zum Grenzwert für $n \to \infty$ über, so ergibt sich $\mu^*(E) = \mu^*(F)$. Es ist $F \setminus E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$ und

$$\mu^*(F \setminus E) \overset{\mu^*(E)<\infty}{=} \mu^*(F) - \mu^*(E) = 0$$

Mit derselben Argumentation wie eben folgt nun, dass es ein $G \in \sigma(\mathcal{R})$ mit $(F \setminus E) \subseteq G$ und $0 = \mu^*(F \setminus E) = \mu^*(G)$ gibt. Dann ist $E \supseteq F \setminus G$, also

$$E = \underbrace{(F \setminus G)}_{\in \sigma(\mathcal{R})} \cup \underbrace{(E \cap G)}_{\subseteq G \in \sigma(\mathcal{R})}$$

d. h. aber $E \in \overline{\sigma(\mathcal{R})}$.

μ^* ist σ-endlich, d. h. es gibt eine aufsteigende Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{M}_{\mu^*}$ mit $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = S$ und $\mu^*(A_n) < \infty$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Betrachte nun für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $\mathcal{M}_n = \mathcal{M}_{\mu^*} \cap A_n = \{A \cap A_n \mid A \in \mathcal{M}_{\mu^*}\}$. Für $E \in \mathcal{M}_n$ gilt $\mu^*(E) \leq \mu^*(A_n) < \infty$, d. h. $E \in \overline{\sigma(\mathcal{R})}$ nach dem oben Gezeigten. Da für jedes $E \in \mathcal{M}_{\mu^*}$

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} (E \cap A_n)$$

gilt, und $E \cap A_n \in \mathcal{M}_n \subseteq \overline{\sigma(\mathcal{R})}$, muss auch $E \in \overline{\sigma(\mathcal{R})}$ sein. □

11.3.9 Eigenschaften des Lebesgue-Maßes

Satz.

1. λ^N ist **regulär**, d. h. für alle $A \in \mathcal{L}_N$ gilt
$$\begin{aligned}\lambda^N(A) &= \inf\left\{\lambda^N(O) \mid O \supseteq A \text{ offen}\right\} && \text{(„}\textbf{Regularität von außen}\text{“)}\\ &= \sup\left\{\lambda^N(C) \mid C \subseteq A \text{ abgeschlossen}\right\} && \text{(„}\textbf{Regularität von innen}\text{“)}\\ &= \sup\left\{\lambda^N(K) \mid K \subseteq A \text{ kompakt}\right\}\end{aligned}$$
2. λ^N ist translationsinvariant, d. h. für alle $A \in \mathcal{L}_N$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ gilt auch $x_0 + A \in \mathcal{L}_N$ und $\lambda^N(x_0 + A) = \lambda^N(A)$.
3. $\lambda^N(\{x\}) = 0$, allgemeiner $\lambda^N(A) = 0$ für abzählbare $A \subseteq \mathbb{R}^N$.
4. Falls A ein k-dimensionaler Untervektorraum von $\mathbb{R}^N$ ist für $k < N$, dann gilt $\lambda^N(A) = 0$.

Beweis.

1. Sei $A \in \mathcal{L}_N$. Wir zeigen: Für jedes $\epsilon > 0$ gibt es eine offene Menge $O \supseteq A$ mit $\lambda^N(O \setminus A) < \epsilon$ und eine abgeschlossene Menge $C \subseteq A$ mit $\lambda^N(A \setminus C) < \epsilon$.

   Sei $\epsilon > 0$ beliebig vorgelegt. Sei zunächst $\lambda^N(A) < \infty$. Es ist
$$\lambda^N(A) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^N(I_n) \mid I_n \in \mathcal{I}^N \quad \forall\, n \in \mathbb{N},\, A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n\right\},$$
   also gibt es eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{I}^N$ mit $A \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ und
$$\lambda^N(A) + \frac{\epsilon}{2} \geq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^N(I_n)$$
   Wähle zu jedem $n \geq 1$ ein $J_n \in \mathcal{I}^N$ mit $I_n \subset \mathring{J}_n$ und
$$\lambda^N(J_n) \leq \lambda^N(I_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}$$
   Setzt man $O := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{J}_n \supseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \supseteq A$ (O ist offensichtlich offen), so gilt
$$\begin{aligned}\lambda^N(O \setminus A) = \lambda^N(O) - \lambda^N(A) &= \lambda^N\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathring{J}_n\right) - \lambda^N(A)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^N(\mathring{J}_n) - \lambda^N(A)\\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty}\left(\lambda^N(I_n) + \frac{\epsilon}{2^{n+1}}\right) - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^N(I_n) + \frac{\epsilon}{2}\\ &= \frac{\epsilon}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon\end{aligned}$$

Ist $\lambda^N(A)$ beliebig, so gilt in jedem Fall $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A \cap [-n,n]^N)$. Es ist für alle $n \in \mathbb{N}$ $\lambda^N(A \cap [-n,n]^N) \leq \lambda^N([-n,n]^N) < \infty$, also gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine offene Menge $O_n \supseteq (A \cap [-n,n]^N)$ mit

$$\lambda^N(O_n \setminus A) \leq \lambda^N(O_n \setminus \left(A \cap [-n,n]^N\right)) < \frac{\epsilon}{2^n}$$

Dann ist $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n \supseteq A$ offen und

$$\begin{aligned}
\lambda^N\left(\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} O_n\right) \setminus A\right) &= \lambda^N\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (O_n \setminus A)\right) \\
&\leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^N(O_n \setminus A) \\
&< \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^n} = \epsilon
\end{aligned}$$

Nach dem eben Gezeigten gibt eine offene Menge $O \supseteq A^c$ mit $\lambda^N(O \setminus A^c) < \epsilon$. Setzt man $C := O^c$, so ist $C \subseteq A$ abgeschlossen und es gilt

$$\lambda^N(A \setminus C) = \lambda^N(A \cap O) = \lambda^N(O \setminus A^c) < \epsilon$$

Damit haben wir

$$\begin{aligned}
\forall \epsilon > 0 \quad \exists O \supseteq A \text{ offen } &: \lambda^N(O) = \lambda^N(O \cap A) + \lambda^N(O \setminus A) < \lambda^N(A) + \epsilon, \\
\forall \epsilon > 0 \quad \exists C \subseteq A \text{ abg. } &: \lambda^N(A) = \lambda^N(A \cap C) + \lambda^N(A \setminus C) < \lambda^N(C) + \epsilon,
\end{aligned}$$

was die ersten beiden Behauptungen zeigt. Zur letzten:
Sei $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\alpha < \lambda^N(A)$. Dann gibt es ein abgeschlossenes $C \subseteq A$ mit $\alpha < \lambda^N(C) \leq \lambda^N(A)$. Es gilt $C = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (C \cap [-n,n]^N)$ und damit

$$\lambda^N(C \cap [-n,n]^N) \nearrow \lambda^N(C)$$

für $n \to \infty$, insbesondere gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, für das $\alpha \leq \lambda^N(C \cap [-n,n]^N)$ gilt. $C \cap [-n,n]^N$ ist aber kompakt.

2. Seien $A \in \mathcal{L}_N$. Mit Hilfe der Definition des äußeren Maßes sieht man ein, dass $\left(\lambda^N\right)^*(x_0 + D) = \left(\lambda^N\right)^*(D)$ für alle $D \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$ gilt, also

$$\begin{aligned}
&\left(\lambda^N\right)^*(D) \\
&= \left(\lambda^N\right)^*((-x_0) + D) \\
&= \left(\lambda^N\right)^*(((-x_0) + D) \cap A) + \left(\lambda^N\right)^*(((-x_0) + D) \cap A^c) \\
&= \left(\lambda^N\right)^*(x_0 + (((-x_0) + D) \cap A)) + \left(\lambda^N\right)^*(x_0 + (((-x_0) + D) \cap A^c)) \\
&= \left(\lambda^N\right)^*(D \cap (x_0 + A)) + \left(\lambda^N\right)^*(D \cap (x_0 + A^c)) \\
&= \left(\lambda^N\right)^*(D \cap (x_0 + A)) + \left(\lambda^N\right)^*(D \cap (x_0 + A)^c)
\end{aligned}$$

für beliebige $D \subseteq \mathbb{R}^N$, $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Das zeigt $x_0 + A \in \mathcal{L}_N$.

3. Seien $A \in \mathcal{L}_N$ eine abzählbare Menge, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Abzählung von A. Es gilt
$$\lambda^N(A) = \lambda^N\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x_n\}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\lambda^N(\{x_n\})}_{=0} = 0$$

4. Seien $k < N$ und $A \subset \mathbb{R}^N$ ein k-dimensionale Untervektorraum von $\mathbb{R}^N$, aufgespannt von den Vektoren $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{R}^N$. Wir nehmen zunächst an, dass es sich dabei um die ersten k Einheitsvektoren handle. Dann gilt
$$A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \bigcap_{m\in\mathbb{N}} \left([-n,n]^k \times \left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right]^{N-k}\right)$$
und folglich $A \in \mathcal{L}_N$ mit
$$\begin{aligned}\lambda^N(A) &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \lambda^N\left([-n,n]^k \times \left[-\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right]^{N-k}\right)\\ &= \lim_{n\to\infty} \lim_{m\to\infty} \left((2n)^k \cdot \left(\frac{2}{m}\right)^{N-k}\right) = 0\end{aligned}$$
Seien die v_i nun beliebig (linear unabhängig). Erweitere sie durch Vektoren $v_{k+1}, \ldots, v_N$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^N$. Definiere eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ durch $f(e_i) = v_i$ für jedes $1 \leq i \leq N$. Wir zeigen später, dass sich Maße unter bijektiven affin-linearen Abbildungen so transformieren, dass das sogenannte Bildmaß sich nur um einen multiplikativen, von der Determinante der linearen Abbildung abhängigen Faktor unterscheidet. Ist A bezüglich des einen Maßes eine Nullmenge, dann sie es auch bezüglich der anderen.

□

11.4 Messbare Funktionen

11.4.1 Motivation

1. Erinnern wir uns an die Idee unseres neuen Integralbegriffs:

   Sei $f : \Omega \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, zunächst $f \geq 0$. Wir zerlegen das Bild von f in Teilintervalle $I_k = [a_k, b_k]$ und wollen deren Wert bezüglich ihres Urbildes $f^{-1}(I_k)$ gewichten. Wir benötigen also einen Maßraum (Ω, Σ, μ) und approximieren dann den Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse durch Summen der Form
$$\sum_k \xi_k \cdot \mu(f^{-1}(I_k))$$
   für $\xi_k \in [a_k, b_k]$, was voraussetzt, dass $f^{-1}(I_k)$ stets messbar ist.

2. Aus der Wahrscheinlichkeitstheorie: Wir betrachten den Wurf zweier fairer Würfel. Als Ereignismenge ergibt sich
$$\Omega = \{(1,1), \ldots, (6,6)\}$$

und als Wahrscheinlichkeit $P(\{\omega\}) = \frac{1}{36}$ für alle $\omega \in \Omega$, also $P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ für alle $A \subseteq \Omega$. Dann ist $(\Omega, \Sigma, \mu) = (\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Angenommen uns interessiert nicht das Elementarereignis, sondern etwa die Summe der gewürfelten Zahlen, d. h. mit

$$h : \Omega \to \mathbb{R}, \quad \omega = (i, j) \mapsto i + j$$

interessiert uns etwa

$$P(\{\omega \in \Omega \mid h(w) \geq 5\}) = P(h^{-1}([5, \infty])),$$

wobei auch hier wieder $h^{-1}([5, \infty])$ in der σ-Algebra Σ des Maßraums (Ω, Σ, μ), also hier in $\mathcal{P}(\Omega)$ liegen muss, was natürlich stets erfüllt ist. Aber im Allgemeinen werden Zufallsexperimente vorliegen, deren Wahrscheinlichkeitsraum nicht die Potenzmenge der Ereignismenge als σ-Algebra zu Grunde legt.

11.4.2 Definition

Definition 11.4.1. Seien $(\Omega_1, \Sigma_1), (\Omega_2, \Sigma_2)$ messbare Räume, $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ eine Funktion. Dann heißt f $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$**-messbar**, wenn

$$f^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega_1 \mid f(\omega) \in B\} \in \Sigma_1 \quad forall\, B \in \Sigma_2$$

Ist Ω_2 ein topologischer Raum, $\Sigma_2 = \mathcal{B}(\Omega_2)$, also die Borel'sche σ-Algebra über Ω_2 (speziell für $\Omega_2 = \mathbb{R}^N, N \in \mathbb{N}$ also $\Sigma_2 = \mathcal{B}_N$), dann heißt eine $\Sigma_2 = \mathcal{B}(\Omega_2)$-messbare Funktion auch **Borel-messbar**.

$f : \Omega_1 \to \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ heißt Borel-messbar, falls

$$f^{-1}(\{\pm\infty\}) \in \Sigma_1,\, f^{-1}(B) \in \Sigma_1 \quad \forall\, B \in \mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$$

Bemerkung.

1. In der Wahrscheinlichkeitstheorie bezeichnet man messbare Funktionen als **Zufallsvariablen**.

2. Wie im Falle der Stetigkeit von Abbildungen zwischen topologischen Räumen interessieren für die Messbarkeit einer Funktion nur die Urbilder $f^{-1}(B)$, $B \in \Sigma_2$ und nicht die Bilder $f(A)$, $A \in \Sigma_1$. Es ist möglich, dass für eine messbare Funktion $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ das Bild $f(A) \notin \Sigma_2$ für ein $A \in \Sigma_1$.

3. Wegen den Beziehungen

$$f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n), \quad f^{-1}\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n),$$
$$f^{-1}(\Omega_2 \setminus B) = \Omega_1 \setminus f^{-1}(B)$$

   für $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma_2$, $B \in \Sigma_2$ ist eine Abbildung $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ $(\Sigma_1 - \Sigma_2)$-messbar genau dann, wenn $f^{-1}(B) \in \Sigma_1$ für alle $B \in \mathcal{A}$, wobei $\mathcal{A}$ ein Mengensystem ist, das Σ_2 erzeugt (d. h. $\sigma(\mathcal{A}) = \Sigma_2$).

4. $\mathcal{A} = \{B \cup E \mid B \in \mathcal{B}_1,\, E \subseteq \{-\infty, +\infty\}\}$ ist eine σ-Algebra über $\overline{\mathbb{R}}$, die als **Borel'sche σ-Algebra über $\overline{\mathbb{R}}$** bezeichnet wird.

11.4.3 Elementare Eigenschaften

Lemma 11.4.2. Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum.

i) Kompositionen messbarer Funktionen sind messbar.

ii) Seien Ω, X topologische Räume, $\Sigma = \mathcal{B}(\Omega)$ die Borel'sche σ-Algebra und ist $f : \Omega \to X$ stetig, dann ist f Borel-messbar (genauer $\Sigma - \mathcal{B}(X)$-messbar).

iii) Sei $\pi_j : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$, $x \mapsto x_j$ für $j \in \{1, \ldots, N\}$ die Projektion auf die j-ten Koordinate, dann gilt

$f : \Omega \to \mathbb{R}^N$ ist messbar $\iff$ $\pi_j \circ f$ ist messbar für alle $j = 1, \ldots, N$.

iv) Für $f : \Sigma \to \mathbb{R}$ sind äquivalent

- f ist Borel-messbar.
- $\{f > \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) > \alpha\} \in \Sigma \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\{f \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geq \alpha\} \in \Sigma \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\{f < \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) < \alpha\} \in \Sigma \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$
- $\{f \leq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq \alpha\} \in \Sigma \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

Beweis.

i) Seien $(\Omega_1, \Sigma_1), (\Omega_1, \Sigma_1), (\Omega_3, \Sigma_3)$ messbare Räume, $f : \Omega_1 \to \Omega_2$, $g : \Omega_2 \to \Omega_3$ messbare Funktionen. Dann ist $g \circ f : \Omega_1 \to \Omega_3$ messbar, denn sei $B \in \Sigma_3$, dann ist $g^{-1}(B) \in \Sigma_2$ und damit $(g \circ f)^{-1}(B) = f^{-1}(g^{-1}(B)) \in \Sigma_1$.

ii) $\mathcal{B}(X)$ wird von den offenen Mengen der Topologie von X erzeugt. Sei also $O \subseteq X$ offen. Da f stetig ist, ist $f^{-1}(O)$ offen in Ω, aber dann ist $f^{-1}(O) \in \mathcal{B}(\Omega) = \Sigma$.

iii) Sei zunächst f messbar. Da die Projektionen stetige Abbildungen sind, folgt aus ii), dass $\pi_j \circ f$ für jedes j messbar ist.

Seien nun die $\pi_j \circ f$ messbar. Sei $O \subseteq \mathbb{R}^N$ offen, dann gibt es für jedes $j \in \{1, \ldots, N\}$ ein offenes $O_j \subseteq \mathbb{R}$ so, dass $O = \bigcap_{j=1}^N \pi_j^{-1}(O)$ gilt. Damit ist

$$f^{-1}(O) = f^{-1}\left(\bigcap_{j=1}^N \pi_j^{-1}(O)\right) = \bigcap_{j=1}^N f^{-1}(\pi_j^{-1}(O)) = \bigcap_{j=1}^N \underbrace{(\pi_j \circ f)(O)}_{\in \Sigma} \in \Sigma$$

iv) $\mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ wird von jeder der Mengen

- $\{]\alpha, \infty[\mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
- $\{[\alpha, \infty[\mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
- $\{]-\infty, \alpha[\mid \alpha \in \mathbb{R}\}$
- $\{]-\infty, \alpha] \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$

erzeugt. Zusammen mit Bemerkung 3 weiter oben ist alles gezeigt.

□

11.4.4 Beispiele für messbare Funktionen

Seien (Ω, Σ) ein messbarer Raum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f ist zum Beispiel messbar, wenn

- f eine konstante Funktion ist oder
- $(\Omega, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ und f eine monotone Funktion ist
- $f = \chi_A$ die Indikatorfunktion einer Menge $A \in \Sigma$ ist. Speziell: Für $(\Omega, \Sigma) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ oder $(\mathbb{R}, \mathcal{L}_1)$ ist die Dirichlet-Funktion $f = \chi_{\mathbb{Q}}$ Borel-messbar.

11.4.5 Zusammensetzungen von messbaren Funktionen

Satz 11.4.3. Seien (Ω, Σ) ein messbarer Raum, $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ (Borel-)messbare Funktionen, $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann sind auch

$$f \pm g, f \cdot g, \max(f, g), \min(f, g), |f|, \alpha \cdot f, f^-, f^+$$

und, falls $f(\omega) \neq 0$ für alle $\omega \in \Omega$, auch $\frac{1}{f}$ messbare Funktionen.

Insbesondere ist die Menge der (Borel-)messbaren Funktionen $: \Omega \to \mathbb{R}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum.

Beweis. $+ : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x + y$ und $(f, g) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto (f(x), g(x))$ sind stetige und damit messbare Funktionen, also ist deren Komposition $f + g$ messbar. Analoges gilt für $f - g$ und $f \cdot g$. Damit ist auch klar, dass $\alpha \cdot f$ messbar ist.

Ebenso ist die Betragsfunktion stetig, und damit messbar, also auch $|f|$ messbar. Die Messbarkeit von $\max(f, g)$ folgt wegen

$$\max(f, g) = \frac{|f - g| + g + f}{2},$$

die von $\min(f, g)$ wegen $\min(f, g) = -\max(-f, -g)$. Weiterhin: $f^+ = \max(0, f)$ und $f^- = -\min(0, f)$. $\square$

Der Vorteil daran, dass wir auch sogenannte **numerische Funktionen** $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ zulassen, besteht darin, dass für Folgen von Funktionen $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$, auch Funktionen vom Typ

$$(\sup_{n \in \mathbb{N}} f_n)(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} f_n(x), \quad \forall\, x \in \Omega$$

wohldefiniert sind.

Konvention. Im Folgenden treffen wir die Vereinbarung: $+\infty \cdot 0 = -\infty \cdot 0 = 0$. Der Ausdruck $\infty - \infty$ ist aber nach wie vor nicht definiert.

11.4.6 Messbarkeit unter Supremums- und Limesbildung

Satz 11.4.4. Sei $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine (Borel-)messbare Funktion. Dann sind auch die nachfolgend definierten Funktionen $\Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ allesamt (Borel-)messbar:

- $f(x) = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, $F(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$ für $x \in \Omega$,
- $f^*(x) = \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(x)$, $F^*(x) = \limsup_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \in \Omega$,
- falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf Ω konvergiert (insbesondere, wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise monoton ist), dann $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$ für $x \in \Omega$.

Beweis.

- Es ist für $\alpha \in \mathbb{R}$
$$\{f \geq \alpha\} = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \geq \alpha\} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\{f_n \geq \alpha\}}_{\in\Sigma} \in \Sigma,$$
also ist f messbar nach Lemma 11.4.2, iv). Analog ist
$$\{F \geq \alpha\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{f_n \geq \alpha\} \in \Sigma$$
und damit F messbar.
- Es gilt
$$\begin{aligned} f^*(x) &= \liminf_{n\to\infty} f_n(x) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m\geq n} f_m(x), \\ F^*(x) &= \limsup_{n\to\infty} f_n(x) = \inf_{n\in\mathbb{N}} \sup_{m\geq n} f_m(x) \end{aligned}$$
und die Behauptung folgt aus i).
- Wenn $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise konvergiert, dann stimmen Limes inferior und Limes superior überein und sind gleich dem Limes, womit $f = f^* = F^*$ gilt und f messbar ist.

□

11.4.7 Einfache Funktionen

Weitere spezielle messbare Funktionen sind sogenannte simple oder einfache Funktionen. Sie werden die Grundlage unserer Integrationstheorie bilden.

Definition 11.4.5. Sei (Ω, Σ) ein messbarer Raum. Eine **(Σ-)einfache** (oder auch **Σ-simple**) **Funktion** ist eine messbare Funktion von Ω nach $\mathbb{R}$, die nur endlich viele Werte annimmt, die in der Form
$$f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \chi_{A_j}$$
darstellbar ist, wobei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die *verschiedenen* Werte von f sind und die $A_j \subseteq \Sigma$ für $j = 1, \ldots, n$. Es gilt also $A_j = \{f = \alpha_j\}$. Wegen der Messbarkeit von f ist $A_j \in \Omega$ für alle $j = 1, \ldots, n$.

Die obige darstellung von f heißt **kanonische Darstellung** von f. Diese ist bis auf die Reihenfolge der Summanden eindeutig.

Bemerkung.

1. Es gibt im Allgemeinen unendlich viele verschiedene Darstellungen einer einfachen Funktion als Linearkombination von Indikatorfunktionen. Zum Beispiel ist
$$\chi_{[0,1]} = 2\chi_{[0,1]} - \chi_{[0,1]} = \chi_{[0,2]} - \chi_{[1,2]}$$
2. Klar ist: die Σ-simplen Funktionen bilden einen $\mathbb{R}$-Vektorraum
3. Wie eingangs schon bemerkt spielen die Σ-simplen Funktionen eine tragende Rolle beim Aufbau der Lebesgue'schen Integrationstheorie.

11.4.8 Approximation nicht-negativer messbarer Funktionen

Satz 11.4.6.

i) Sei $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar. Dann existiert eine Folge von Σ-einfachen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $0 \le f_n(x) \le f_{n+1}(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $x \in \Omega$ und $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ für alle $x \in \Omega$.

ii) Jede messbare Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist punktweiser Limes einer Folge Σ-einfacher Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n(x) \le f(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x \in \Omega$.

iii) Ist f in ii) sogar beschränkt, dann kann $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ so gewählt werden, dass f_n auf Ω gleichmäßig gegen f konvergiert.

Beweis.

i) Wir definieren
$$A_{j,n} := \begin{cases} \left\{ \frac{j}{2^n} \le f < \frac{j+1}{2^n} \right\}, & j = 0, \dots, n \cdot 2^n - 1 \\ \{f \ge n\}, & j = n \cdot 2^n \end{cases}$$
und damit
$$f_n := \sum_{j=0}^{n\cdot 2^n} \frac{j}{2^n} \cdot \chi_{A_{j,n}}$$
Die $A_{j,n}$ sind für jedes $n \in \mathbb{N}$ paarweise disjunkte Σ-messbare Mengen und es gilt
$$\Sigma = \bigcup_{j=0}^{n\cdot 2^n} A_{j,n}, \text{ denn } [0, \infty] = \bigcup_{j=0}^{n\cdot 2^n - 1} \left[\frac{j}{2^n}, \frac{j+1}{2^n} \right[\cup [n, \infty]$$
Außerdem gilt $\frac{j}{2^n} \ne \frac{k}{2^n}$ für $0 \le j < k \le n \cdot 2^n$, womit die f_n die Definition von einfachen Funktionen erfüllen.
Für $n \in \mathbb{N}$, $0 \le j < n \cdot 2^n$ ist
$$\begin{aligned} A_{j,n} &= \left\{ \frac{j}{2^n} \le f < \frac{j+1}{2^n} \right\} = \left\{ \frac{2j}{2^{n+1}} \le f < \frac{2j+2}{2^{n+1}} \right\} \\ &= \left\{ \frac{2j}{2^{n+1}} \le f < \frac{2j+1}{2^{n+1}} \right\} \dot\cup \left\{ \frac{2j+1}{2^{n+1}} \le f < \frac{2j+2}{2^{n+1}} \right\} \\ &= A_{2j,n+1} \dot\cup A_{2j+1,n+1} \end{aligned}$$

und

$$
\begin{aligned}
A_{n\cdot 2^n,n} &= \{f \geq n\} = \{n \leq f < n+1\} \,\dot\cup\, \{f \geq n+1\} \\
&= \left(\bigcup_{j=n\cdot 2^{n+1}}^{(n+1)\cdot 2^{n+1}-1} \left\{ \frac{j}{2^{n+1}} \leq f < \frac{j+1}{2^{n+1}} \right\} \right) \dot\cup\, \{f \geq n+1\} \\
&= \bigcup_{j=n\cdot 2^{n+1}}^{(n+1)\cdot 2^{n+1}} A_{j,n+1}
\end{aligned}
$$

Wegen

$$
\begin{aligned}
\frac{j}{2^n} &\leq \frac{2j}{2^{n+1}}, \frac{2j+1}{2^{n+1}} && \forall\, 0 \leq j < n \cdot 2^n, \\
n &\leq \frac{j}{2^{n+1}} && \forall\, n \cdot 2^{n+1} \leq j \leq (n+1) \cdot 2^{n+1}
\end{aligned}
$$

sieht man damit $f_n \leq f_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ein.

Weiterhin gibt es für $x \in [0, \infty]$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(x) < n_0$. Für alle $n \geq n_0$ gibt es dann ein $0 \leq j < n \cdot 2^n$ so, dass $x \in A_{j,n} = \left\{ \frac{j}{2^n} \leq f < \frac{j+1}{2^n} \right\}$. Folglich:

$$
|f(x) - f_n(x)| = \left| f(x) - \frac{j}{2^n} \right| < \frac{1}{2^n} \quad \forall\, n \geq n_0,
$$

womit die punktweise monotone Konvergenz von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen f gezeigt ist.

ii) folgt aus i) durch Approximation von f^+ und f^- durch Σ-einfache Funktionen f_n^+, f_n^- für $n \in \mathbb{N}$. $f_n = f_n^+ - f_n^-$ ist dann die gesuchte Σ-einfache Approximation von f.

iii) Ist f beschränkt, so gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $f(x) \leq n_0$ für alle $x \in \Omega$. Die Abschätzung $|f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2^n}$ aus i) gilt dann für alle $n \geq n_0$ und alle $x \in \Omega$, sofern $f \geq 0$. Teil ii) liefert dann den allgemeinen Fall.

□

11.4.9 Rolle von Nullmengen

Definition. Wenn (Ω, Σ, μ) ein Maßraum (bzw. (Ω, Σ, P) ein Wahrscheinlichkeitsraum) ist, sagt man, eine Eigenschaft (E) gilt **fast überall** - kurz „f. ü.„ - (bzw. **fast sicher**, kurz „f. s.“) auf Ω, wenn ein $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = 0$ (bzw. $P(A) = 0$) so existiert, dass (E) auf $\Omega \setminus A$ gilt.

Beispielsweise heißen $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ gleich fast überall, kurz $f = g$ f. ü., auf Ω genau dann, wenn ein $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = 0$ existiert so, dass $f(\omega) = g(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega \setminus A$.

11.4.10 Speziell: Vollständige Maßräume

In vollständigen Maßräumen reicht es oft aus, für eine Eigenschaft zu fordern, dass sie fast überall gilt.

Satz 11.4.7. Sei (Ω, Σ, μ) ein vollständiger Maßraum.

i) Sind $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ zwei Funktionen mit $f = g$ f. ü., dann gilt

f ist (Σ-Borel-)messbar $\iff$ g ist (Σ-Borel-)messbar.

ii) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Folge messbarer Funktionen und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine Funktion mit $f_n \to f$ punktweise f. ü. auf Ω, dann ist f messbar.

Bemerkung. Die Aussagen i) und ii) des obigen Satzes gelten im Allgemeinen nicht, wenn (Ω, Σ, μ) nicht vollständig ist.

Beweis.

i) Es existiert also eine Menge $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = 0$ so, dass $f = g$ auf $\Omega \setminus A$ gilt. Sei f messbar und sei $B \in \mathcal{B}_0(\overline{\mathbb{R}})$, dann gilt $f^{-1}(B) \in \Sigma$. Es gilt

$$f^{-1}(B) \cap (\Omega \setminus A) = g^{-1}(B) \cap (\Omega \setminus A)$$

und damit

$$\begin{aligned} g^{-1}(B) &= \big(g^{-1}(B) \cap (\Omega \setminus A)\big) \,\dot\cup\, \big(g^{-1}(B) \cap A\big) \\ &= \underbrace{\big(f^{-1}(B) \cap (\Omega \setminus A)\big)}_{\in\Sigma} \,\dot\cup\, \underbrace{\big(g^{-1}(B) \cap A\big)}_{\subseteq A} \in \Sigma, \end{aligned}$$

da $g^{-1}(B) \cap A$ als Teilmenge einer Nullmenge ebenfalls in Σ liegt (dies war die definierende Eigenschaft eines vollständigen Maßraumes).

Die andere Richtung folgt natürlich aus Symmetriegründen.

ii) Es gibt wieder ein $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = 0$ so, dass f_n auf $\Omega \setminus A$ gegen f konvergiert (außerhalb davon muss f_n nicht konvergieren). Definiere für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\tilde{f}_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \tilde{f}_n(x) := \begin{cases} f_n(x), & x \in \Omega \setminus A \\ 0, & x \in A \end{cases}$$

Dann gilt $\tilde{f}_n = f_n$ f. ü., d. h. die $\tilde{f}_n$ sind nach i) messbar und konvergieren punktweise *überall* gegen

$$\tilde{f} : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}, \quad \tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in \Omega \setminus A \\ 0, & x \in A \end{cases}$$

und ist damit ebenfalls messbar. $\tilde{f}$ stimmt mit f fast überall überein, also ist nach i) auch f messbar.

□

11.4.11 Satz von Egorov

Im „maßtheoretischen Sinne“ sind „punktweise fast überall Konvergenz“ und „gleichmäßige Konvergenz“ nicht weit voneinander entfernt.

Satz 11.4.8 (Satz von Egorov)**.** Sei (Ω, Σ, μ) ein endlicher (d. h. $\mu(\Omega) < \infty$) vollständiger Maßraum. Sei weiter $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge messbarer Funktionen, die f. ü. gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert. Dann gilt:

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, A \in \Sigma \,:\, \mu(A) < \epsilon \text{ und } f_n \stackrel{\text{glm.}}{\longrightarrow} f \text{ auf } \Omega \setminus A$$

Beweis. Wie eben gezeigt ist f als punktweiser f. ü. Limes einer Folge messbarer Funktionen ebenfalls messbar.

Für $i, j, k \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$A_{i,k} := \left\{ x \in \Omega \mid |f(x) - f_k(x)| > \frac{1}{2^i} \right\}, \quad C_{i,j} := \bigcup_{k=j}^{\infty} A_{i,k}$$

Behauptungen:

1. $C_{i,j} \in \Sigma$: Zunächst ist $C_{i,j} \in \Sigma$, denn $|f - f_k|$ und $\frac{1}{2^i}$ sind messbare Funktionen, also ist $A_{i,k} \in \Sigma$ und folglich sind auch die $C_{i,j}$ als abzählbare Vereinigungen von $A_{i,k}$ Elemente von Σ.

2. Für alle $i, j \in \mathbb{N}$ gilt $C_{i,j+1} \subseteq C_{i,j}$. Das ist klar.

3. Es ist $\mu\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} C_{i,j}\right) = 0$ für jedes $i \in \mathbb{N}$.

   Klar ist: $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} C_{i,j} \in \Sigma$. Nach Voraussetzung konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise fast überall gegen f, d. h. es gibt ein $B \in \Sigma$ mit $\mu(B) = 0$ so, dass
   $$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \forall\, x \in \Omega \setminus B$$
   Sei $i \in \mathbb{N}$ fest und $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} C_{i,j}$ (wenn der Schnitt leer ist, dann ist nichts zu zeigen). Dann ist $x \in C_{i,j}$ für alle $j \in \mathbb{N}$, d. h. für alle $j \in \mathbb{N}$ gibt es ein $k \geq j$ mit $x \in A_{i,k}$, mit anderen Worten: $|f(x) - f_k(x)| > \frac{1}{2^i}$. In diesem Punkt konvergiert f_k also nicht gegen f, also ist $x \in B$.

   Das zeigt $\bigcap_{j\in\mathbb{N}} C_{i,j} \subseteq B$ für jedes $i \in \mathbb{N}$, also wegen der Vollständigkeit des Maßraums
   $$\mu\left(\bigcap_{j\in\mathbb{N}} C_{i,j}\right) \qquad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

Nun folgt aus der σ-Additivität von μ wegen $\mu(\Omega) < \infty$, dass μ von oben stetig ist, d. h.

$$0 = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} C_{i,j}\right) \stackrel{\text{nach 2.}}{=} \lim_{n\to\infty} \mu(C_{i,j}) \quad \forall\, i \in \mathbb{N}$$

Folglich

$$\forall\, i \in \mathbb{N} \quad \exists\, J(i) \in \mathbb{N} \quad \forall\, j \geq J(i) \,:\, \mu(C_{i,j}) < \frac{\epsilon}{2^i}$$

Setze

$$A := \bigcup_{i=1}^{\infty} C_{i,J(i)} \in \Sigma$$

Dann ist

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} C_{i,J(i)}\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(C_{i,J(i)}) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^i} = \epsilon$$

und für jedes $x \notin A = \bigcup_{i=1}^{\infty} \bigcup_{k=J(i)}^{\infty} A_{i,k}$ gilt

$$\forall\, i \in \mathbb{N} \quad \forall\, k \geq J(i) \;:\; |f(x) - f_k(x)| < \frac{1}{2^i}$$

d. h. $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert auf $\Omega \setminus A$ gleichmäßig gegen f. □

Bemerkung.

1. Der Satz von Egorov gilt auch für nicht vollständige Maßräume, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist

   i) $f_n \to f$ punktweise auf ganz Ω.

   ii) $f_n \to f$ μ-f. ü. und f ist Borel-messbar.

2. Der Satz gilt nicht für unendliche Maße.

   Betrachte beispielsweise $(\mathbb{R}, \mathcal{B}_0(\mathbb{R}), \lambda)$, dann ist $\lambda(\mathbb{R}) = \infty$, und für $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n = \chi_{]n,n+1[}$ gilt: $f_n(x) \to 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, aber es gibt keine Nullmenge, außerhalb der die Konvergenz ist gleichmäßig ist:

   Sei $0 < \epsilon < 1$ beliebig, $A \in \mathcal{B}_0(\mathbb{R})$ mit $\mu(A) < \epsilon$. Für festes $n \in \mathbb{N}$ ist $(\mathbb{R} \setminus A) \cap]n, n+1[\neq \emptyset$, sonst wäre $]n, n+1[\subseteq A$, was dann wegen $0 = \lambda(A) \geq \lambda(]n, n+1[) = 1$ zu einem Widerspruch führt.

   Also gibt es ein $x \in (\mathbb{R} \setminus A)$, für das $f_n(x) = 1$ gilt, also stets

   $$\sup_{x\in\mathbb{R}\setminus A} |f(x)| = 1$$

   was mit gleichmäßiger Konvergenz auf $\mathbb{R} \setminus A$ unvereinbar ist.

11.4.12 Konvergenz dem Maße nach

Insbesondere in der Wahrscheinlichkeitstheorie spielt neben der f. ü.-Konvergenz auch die **Konvergenz dem Maße nach** eine entscheidende Rolle.

Definition 11.4.9. Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Folge messbarer Funktionen. Dann **konvergiert** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **dem Maße nach** gegen f, wenn gilt

$$\forall\, \epsilon > 0 \;:\; \lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \epsilon\}) = 0$$

Man kann zeigen: Wenn $\mu(\Omega) < \infty$, dann gilt

1. falls $f_n \to f$ f. ü. auf Ω, dann konvergiert f_n dem Maße nach gegen f

2. Wenn $f_n \to f$ dem Maße nach, dann existiert eine Teilfolge $(f_{n_k})_k$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_{n_k} \to f$ für $k \to \infty$ f. ü. auf Ω.

   Für die gesamte Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt dies im Allgemeinen nicht.

11.5 Lebesgue-Integration

Unser Ziel ist es, bei gegebenem Maßraum (Ω, Σ, μ) für eine möglichst große Klasse von messbaren Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ein (bestimmtes) Integral $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$ zu definieren und zu studieren. Dabei gehen wir in 3 Schritten vor:

1. Schritt: Definiere und untersuche $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$ für Σ-einfache Funktionen $f : \Omega \to [0, +\infty]$.
2. Schritt: Definiere und untersuche $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$ für Σ-messbare Funktionen $f : \Omega \to [0, +\infty]$.
3. Schritt: Definiere und studiere $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$ für eine große Klasse Σ-messbarer Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{R}$.

11.5.1 Schritt 1: Integral für positive einfache Funktionen

Definition 11.5.1. Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $g = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$ die kanonische Darstellung einer Σ-einfachen Funktion mit $\alpha_j \geq 0$ (paarweise verschieden), $A_j = \{g = \alpha_j\}$ (paarweise disjunkt) für $j = 1, \ldots, n$.

Für $E \in \Sigma$ definieren wir

$$\int_E g \, \mathrm{d}\mu = \int_E g(\omega) \, \mathrm{d}\mu(\omega) := \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \mu(E \cap A_j) \in [0, \infty]$$

Es gilt das folgende

Lemma 11.5.2. Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $g, h : \Omega \to [0, +\infty]$ Σ-einfache Funktionen mit kanonischen Darstellungen $g = \sum_{j=1}^n \alpha_j \chi_{A_j}$, $h = \sum_{i=1}^m \beta_i \chi_{B_j}$, $E \in \Sigma$. Dann gilt

i) $\nu : \Sigma \to [0, \infty]$, $A \mapsto \int_A g \, \mathrm{d}\mu$ ist ein Maß,

ii) $\int_E g + h \, \mathrm{d}\mu = \int_E g \, \mathrm{d}\mu + \int_E h \, \mathrm{d}\mu$,

iii) ist $g \leq h$ auf E, dann gilt $\int_E g \, \mathrm{d}\mu \leq \int_E h \, \mathrm{d}\mu$, und

iii) für alle $\alpha \geq 0$ gilt $\int_E \alpha \cdot g \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_E g \, \mathrm{d}\mu$.

Beweis.

i) Wir prüfen die definierenden Eigenschaften nach

- $\nu(\emptyset) = 0$ ist klar
- Sei $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter messbarer Mengen. Dann ist

$$\begin{aligned}
\nu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) &= \int_{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n} g \, \mathrm{d}\mu \\
&= \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu\left(A_j \cap \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n\right) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (A_j \cap E_n)\right) \\
&= \sum_{j=1}^n \alpha_j \sum_{n=1}^\infty \mu\left(A_j \cap E_n\right) = \sum_{n=1}^\infty \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu\left(A_j \cap E_n\right) \\
&= \sum_{n=1}^\infty \int_{E_n} g \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty \nu(E_n)
\end{aligned}$$

ii) Seien g, h wie im Lemma beschrieben. Betrachte

$$E_{j,l} = E \cap A_j \cap B_l \in \Sigma, \quad j = 1, \dots, n,\ l = 1, \dots, m$$

Dann ist $A_i \cap E_{j,l} = \emptyset$ für $i \neq j$ und $A_j \cap E_{j,l} = E_{j,l}$, also

$$\int_{E_{j,l}} g \,\mathrm{d}\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i \cap E_{j,l}) = \alpha_j \mu(E_{j,l})$$

Analog sieht man $\int_{E_{j,l}} h \,\mathrm{d}\mu = \beta_l \mu(E_{j,l})$ ein. Weiter gilt:

$$g + h = \sum_{j,l} (\alpha_j + \beta_l)\, \chi_{(A_j \cap B_l)}$$

$g + h$ ist also Σ-einfach, aber es ist nicht klar, dass die angegebene Darstellung die kanonische ist. Trotzdem gilt

$$\int_{E_{j,l}} g + h \,\mathrm{d}\mu = (\alpha_j + \beta_l)\, \mu(E_{j,l}) x$$

Ist nämlich $g + h = \sum_{p=1}^{r} \gamma_p \chi_{C_p}$ für $\gamma_p \geq 0$, $C_p = \{g + h = \gamma_p\}$ die kanonische Darstellung von $g + h$, so ist

$$\int_{E_{j,l}} g + h \,\mathrm{d}\mu = \sum_{p=1}^{r} \gamma_p \cdot \mu(C_p \cap E_{j,l}) = \sum_{p=1}^{r} \gamma_p \cdot \mu(C_p \cap (A_j \cap B_l \cap E)),$$

und $\gamma_p = \alpha_j + \beta_l$ auf $A_j \cap B_l$, also

$$\int_{E_{j,l}} g + h \,\mathrm{d}\mu = (\alpha_j + \beta_l) \mu\left(\left(\bigcup_{p=1}^{r} C_p\right) \cap A_j \cap B_l \cap E\right) = (\alpha_j + \beta_l) \mu(E_{i,l}),$$

denn $\bigcup_{p=1}^{r} C_p \subseteq \left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \cup \left(\bigcup_{l=1}^{m} B_l\right)$.
Somit haben wir

$$\int_{E_{j,l}} g + h \,\mathrm{d}\mu = \int_{E_{j,l}} g \,\mathrm{d}\mu + \int_{E_{j,l}} h \,\mathrm{d}\mu$$

Zusammen mit $E = \dot{\bigcup}_{i,l} E_{j,l}$ folgt aus i)

$$\begin{aligned} \int_E g + h \,\mathrm{d}\mu &= \sum_{j,l} \int_{E_{j,l}} g + h \,\mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i,j} \left(\int_{E_{j,l}} g \,\mathrm{d}\mu + \int_{E_{j,l}} h \,\mathrm{d}\mu \right) = \int_E g \,\mathrm{d}\mu + \int_E h \,\mathrm{d}\mu \end{aligned}$$

iii) Sei also $g \leq h$ auf E. Dann ist $f := h - g$ Σ-einfach und ≥ 0 auf Ω, und aus der Definition folgt $\int_E f \,\mathrm{d}\mu \geq 0$, also

$$\int_E h \,\mathrm{d}\mu = \int_E f + g \,\mathrm{d}\mu \overset{\text{ii)}}{=} \int_E f \,\mathrm{d}\mu + \int_E g \,\mathrm{d}\mu \geq \int_E g \,\mathrm{d}\mu$$

iv) ist klar nach der Definition.

$\square$

Bemerkung. Aus ii) folgt, dass der Wert des Integrals $\int_E f\,\mathrm{d}\mu$ einer μ-einfachen Funktion nicht von der Darstellung von f abhängt, denn ist $f = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \chi_{A_j}$ die kanonische Darstellung und $f = \int_{l=1}^m \beta_l \cdot \chi_{B_l}$ eine weitere Darstellung von f, so ist

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap E) = \int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E \sum_{l=1}^m \beta_l \cdot \chi_{B_l}\,\mathrm{d}\mu$$
$$= \sum_{l=1}^m \beta_l \cdot \int_E \chi_{B_l}\,\mathrm{d}\mu = \sum_{l=1}^m \beta_l \cdot \mu(E \cap B_l)$$

11.5.2 Schritt 2: Integral für positive messbare Funktionen

Definition 11.5.3. Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $f : \Omega \to [0, +\infty]$ eine Σ-Borel-messbare Funktion. Setze dann für $E \in \Sigma$:

$$\int_E f\,\mathrm{d}\mu := \sup\left\{\int_E \varphi\,\mathrm{d}\mu \mid \varphi\ \Sigma\text{-einfach},\ 0 \leq \varphi \leq f \text{ auf } \Omega\right\}$$

Aus Lemma 11.5.2 ergibt sich sofort

Lemma 11.5.4. Seien $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ Σ-messbare Funktionen, $E, F \in \Sigma$. Dann gilt

i) $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \cdot \chi_E\,\mathrm{d}\mu$.

ii) Ist $f \leq g$ auf Ω, dann gilt auch $\int_E f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_E g\,\mathrm{d}\mu$.

iii) Ist $E \subseteq F$, so gilt $\int_E f\,\mathrm{d}\mu \leq \int_F f$.

Weiter gilt

Lemma 11.5.5. Seien $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ Σ-messbare Funktionen, $E, F \in \Sigma$. Dann gilt

i) Wenn $f = 0$ μ-f. ü. auf E, dann gilt $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = 0$.

ii) Wenn $\{f > 0\} \cap E$ positives Maß hat, dann gilt $\int_E f\,\mathrm{d}\mu > 0$.

iii) Wenn $\int_E f\,\mathrm{d}\mu < \infty$, dann ist $f < \infty$ μ-f. ü. auf E.

iv) Wenn $f = g$ μ-f. ü. auf E, dann gilt $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = \int_E g\,\mathrm{d}\mu$.

v) Aus $\mu(E) = 0$ folgt $\int_E f\,\mathrm{d}\mu = 0$ (auch wenn $f = \infty$ auf E ist).

Beweis. Nach dem vorhergehenden Lemma ist klar, dass es reicht, i) - iv) für $E = \Omega$ zu zeigen.

v) ist klar dank der Konvention $0 \cdot +\infty = 0$.

i) Sei $f = 0$ μ-f. ü. auf Ω, d. h. es gibt ein $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = 0$ und $f = 0$ überall auf $\Omega \setminus A$. Dann gilt für jedes Σ-einfache $\varphi = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i}$ mit $0 \leq \varphi \leq f$ auf Σ, dass $\varphi = 0$ auf $\Omega \setminus A$, also

$$\begin{aligned}\int_\Omega \varphi \, \mathrm{d}\mu &= \int_{\Omega \setminus A} \varphi \, \mathrm{d}\mu + \int_A \varphi \, \mathrm{d}\mu \\ &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu((\Omega \setminus A) \cap A_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{\mu(A \cap A_i)}_{=0} = 0 + 0 = 0\end{aligned}$$

Damit ist aber auch das Supremum über Integrale solcher φ gleich Null, d. h. $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

ii) Sei $\mu(\{f > 0\}) > 0$, dann gilt

$$0 < \mu(\{f > 0\}) = \mu\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \left\{f > \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n \to \infty} \mu\left(\left\{f > \frac{1}{n}\right\}\right),$$

d. h. es gibt ein $N \in \mathbb{N}$ mit $\mu(\{f > \frac{1}{N}\}) > 0$. Es gilt

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{\{f > \frac{1}{N}\}} f \, \mathrm{d}\mu$$

Für die Σ-einfache Funktion $h = \frac{1}{N} \cdot \chi_{\{f > \frac{1}{N}\}}$ gilt $0 \leq h \leq f$ auf Ω und damit

$$\int_\Omega h \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \frac{1}{N} \cdot \chi_{\{f > \frac{1}{N}\}} \, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{N} \mu\left(\left\{f > \frac{1}{N}\right\}\right) > \frac{1}{N} > 0$$

iii) Beweis durch Kontraposition: Sei $\mu\left(\{f = \infty\}\right) > 0$, dann gilt

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \geq \int_{\{f = \infty\}} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\{f = \infty\}} \infty \cdot \chi_{\{f = \infty\}} \, \mathrm{d}\mu = \infty \cdot \mu(\{f = \infty\}) = \infty$$

iv) Ist $f = g$ μ-f. ü. auf Ω, so gibt es ein $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) = 0$ und $f = g$ auf ganz $\Omega \setminus A$. Damit gilt

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\Omega \setminus A} f \, \mathrm{d}\mu + \underbrace{\int_A f \, \mathrm{d}\mu}_{=0 \text{ nach v)}} = \int_{\Omega \setminus A} g \, \mathrm{d} + \underbrace{\int_A g \, \mathrm{d}\mu}_{=0 \text{ nach v)}} = \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$$

□

11.5.3 Satz von der monotonen Konvergenz

Satz 11.5.6 (Satz von Beppo Levi)**.** Seien $f_n : \Omega \to [0, +\infty]$ (Σ-Borel-)messbare Funktionen für $n \in \mathbb{N}$. Wenn $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und punktweise auf Ω gegen $f : \Omega \to [0, +\infty]$ konvergiert (kurz: $f_n \nearrow f$ auf Ω), dann gilt

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu$$

Bemerkung. Anstatt monotoner punktweiser Konvergenz auf ganz Ω genügt es, monotone punktweise Konvergenz μ-f. ü. gegen eine messbare Funktion f zu fordern. Im Falle, dass (Ω, Σ, μ) vollständig ist, ist f nach Lemma 11.4.7 bereits messbar.

Beweis. Da $f_n \leq f_{n+1}$ auf Ω für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt die Existenz von

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu =: \gamma \in [0, \infty]$$

aus der Monotonie des Integrals. Da $f_n \leq f$ auf Ω für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt ebenfalls

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$$

Somit genügt es zu zeigen, dass für jede beliebige Σ-einfache Funktion φ mit $0 \leq \varphi \leq f$ auf Ω gilt:

$$\gamma \geq \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu$$

Erfülle also φ die Voraussetzungen. Sei $0 \leq c < 1$; definiere

$$E_n := \{\omega \in \Omega \mid f_n(\omega) \geq c\varphi(\omega)\} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Da die f_n und φ Σ messbar sind, gilt $E_n \in \Sigma$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen $f_n \leq f_{n+1}$ gilt zudem $E_n \subseteq E_{n+1}$. Aus $f_n \nearrow f$ und $f \geq \varphi$ auf Ω folgt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Omega$$

Also haben wir

$$\gamma \geq \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{E_n} f_n \,\mathrm{d}\mu \geq \int_{E_n} c\varphi \,\mathrm{d}\mu = c \int_{E_n} \varphi \,\mathrm{d}\mu \quad \forall\, 0 \leq c < 1,\, n \in \mathbb{N}$$

Für $c \to 1$ ergibt sich also

$$\gamma \geq \int_{E_n} \varphi \,\mathrm{d}\mu \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

Da $\Sigma \ni A \mapsto \int_A \varphi \,\mathrm{d}\mu$ ein Maß ist, folgt aus der Stetigkeit eines Maßes von unten:

$$\gamma \geq \lim_{n\to\infty} \int_{E_n} \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n} \varphi \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \varphi \,\mathrm{d}\mu$$

□

Mit Hilfe des monotonen Konvergenzsatzes lassen sich nun leicht einige Aussagen über Integrale nicht-negativer Σ-messbarer Funktionen aus den entsprechenden Aussagen für Integrale nicht-negativer Σ-einfacher Funktionen herleiten. So etwa

Lemma 11.5.7. Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f, g : \Omega \to [0, \infty]$ Σ-Borel-messbar, $\alpha \geq 0$. Dann gilt

i) $\int_\Omega f + g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$

ii) $\int_\Omega \alpha \cdot f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$

Beweis. Wir wissen

- i) und ii) gelten für nicht-negative Σ-einfache Funktionen.
- Jede Σ-messbare Funktion $f : \Omega \to [0,\infty]$ lässt sich von unten durch eine aufsteigende Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht-negativer Σ-einfacher Funktionen punktweise approximieren.

Es reicht dann, den monotonen Konvergenzsatz anzuwenden. □

Eine weiter Folgerung aus dem monotonen Konvergenzsatz ist

Korollar 11.5.8. Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $g_n : \Omega \to [0,\infty]$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ Σ-Borel-messbar, $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n$. Dann ist g messbar und

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis. Wende den monotonen Konvergenzsatz auf $f_N = \sum_{n=1}^{N} g_n \nearrow g$ an und nutze die Linearität des Integrals aus:

$$\int_\Omega \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} g_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty} \int_\Omega \sum_{n=1}^{N} g_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=1}^{N} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu$$

□

Daraus kann man wiederum einfach schließen:

Korollar. Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $f : \Omega \to [0,\infty]$ eine Σ-Borel-messbare Funktion. Dann gilt

$$\boxed{f = 0 \ \mu\text{-f. ü. auf } \Omega \iff \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = 0}$$

Beweis. „$\Rightarrow$“ wurde schon in Lemma 11.5.4 gezeigt.

Ist $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = 0$, so gilt nach dem letzten Korollar

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} 0 = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f \,\mathrm{d}\mu$$

Dann muss aber $f = 0$ μ-f. ü. gelten, sonst wäre $\sum f$ auf einer nicht-Nullmenge $= \infty$. □

11.5.4 Lemma von Fatou

Eine weitere nützliche Folgerung aus dem monotonen Konvergenzsatz ist

Satz 11.5.9 (Lemma von Fatou)**.** Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f_n : \Omega \to [0,\infty]$ Σ-Borel-messbare Funktionen. Dann gilt

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis. Bemerke, dass

$$\underbrace{\liminf_{n\to\infty} f_n}_{\text{messbar}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \underbrace{\inf_{k\geq n} f_k}_{=:g_n} = \lim_{n\to\infty} g_n$$

gilt und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge Σ-messbarer Funktionen ist, die punktweise gegen den Limes inferior von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Ω konvergiert. Nach dem monotonen Konvergenzsatz gilt also

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \lim_{n\to\infty} g_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu$$

Nun gilt aber $g_n = \inf_{m\geq n} f_m \leq f_k$ für alle $k \geq n$, somit

$$\int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu \quad \forall\, k \geq n \Rightarrow \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu$$

Für $n \to \infty$ also

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{k\to\infty} \int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu$$

□

11.5.5 Schritt 3: Integral für Funktionen mit beliebigen Werten

Definition 11.5.10. Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine (Σ-Borel-)messbare Funktion. Dann heißt f **μ-integrabel**, falls

$$\int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty \textit{ und } \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

In diesem Fall setzt man

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu$$

Bemerkung.

1. Ist $f : \Omega \to [0, \infty]$ messbar, so ist das Integral $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu$ immer definiert, aber eventuell $= +\infty$. Eine solche nicht-negative messbare Funktion f heißt aber nur dann μ-integrierbar, wenn $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu < \infty$.

   *Ist mindestens eines der Integrale $\int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu, \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu$ endlich, so wird f manchmal auch **(μ-)quasi-integrierbar** genannt.*

2. Eine messbare Funtkion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ ist genau dann μ-integrierbar, wenn $|f|$ μ-integrierbar ist.

3. Sind $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ messbare Funktionen mit $|f| \leq |g|$ μ-f. ü. auf Ω und ist g μ-integrabel, so ist auch f μ-integrabel.

4. Analog kann Integrierbarkeit von messbaren Funktionen $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ über einer Menge $E \in \Sigma$ definiert werden: man fordert dazu, dass

   $$\int_E f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty \text{ und } \int_E f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

   Es gilt dann wie im Fall nicht-negativer messbarer Funktionen

   $$\int_E f \,\mathrm{d}\mu < \infty = \int_\Omega f \cdot \chi_E \,\mathrm{d}\mu < \infty$$

11.5.6 Eigenschaften des Integrals

Satz 11.5.11. Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $f, g : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ μ-integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt

i) $\alpha f + \beta g$ ist integrierbar, sofern es wohlefiniert ist, d. h. sofern nicht an einer Stelle $\infty - \infty$ auftritt, und es gilt $\int_\Omega \alpha f + \beta g \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$.

ii) Ist $f \leq g$ μ-f. ü. auf Ω, so gilt $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$

iii) $\left|\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu$, insbesondere $\left|\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu\right| \leq \int_\Omega |f - g| \, \mathrm{d}\mu$, falls $f - g$ wohldefiniert ist.

Beweis.

iii) Der Zusatz folgt aus der ersten Behauptung zusammen mit i). Die erste Behauptung folgt aus ii) wegen $-|f| \leq f \leq |f|$ auf ganz Ω.

ii) Ist $f \leq g$ μ-f. ü. auf Ω, dann gilt $f^+ \leq g^+$ und $g^- \leq f^-$ μ-f. ü. auf Ω, d. h. wegen der Monotonie des Integrals für nicht-negative messbare Funktionen

$$\int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g^+ \, \mathrm{d}\mu \text{ und } \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu,$$

womit folgt (beachte: alle Integrale sind $< \infty$)

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega g^- \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$$

i) $\alpha f + \beta g$ ist zumindest messbar. Weiterhin gilt

$$|\alpha f + \beta g| \leq |\alpha| \, |f| + |\beta| \, |g| \, ,$$

und da f, g integrierbar sind, ist auch $|\alpha| \, |f| + |\beta| \, |g|$ integrierbar, also auch $\alpha f + \beta g$. Es genügt nun für die Linearität des Integrals die Fälle $\alpha = \beta = 1$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, $\beta = 0$ zu betrachten.

Betrachte also $f + g$. Es ist

$$\begin{aligned} &f^+ - f^- + g^+ - g^- = f + g = (f+g)^+ - (f+g)^- \qquad \Leftrightarrow \\ &f^+ + g^+ + (f+g)^- = f^- + g^- + (f+g)^+ \end{aligned}$$

Aus der Linearität des Integrals für nicht-negative messbare Funktionen folgt

$$\begin{aligned} &\int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega g^+ \, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega (f+g)^- \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega f^+ + g^+ + (f+g)^- \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega f^- + g^- + (f+g)^+ \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega g^- \, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega (f+g)^+ \, \mathrm{d}\mu \qquad (*) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned}\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g\,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega f^+\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^-\,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g^+\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega g^-\,\mathrm{d}\mu \\ &\overset{(*)}{=} \int_\Omega (f+g)^+\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega (f+g)^-\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_\Omega f+g\,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Untersuche nun αf für $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \geq 0$. Es gilt $\alpha f = (\alpha f)^+ - (\alpha f)^- = \alpha f^+ - \alpha f^-$ und damit wegen der Linearität des Integrals für nicht-negative messbare Funktionen

$$\int_\Omega \alpha f^+\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f^+\,\mathrm{d}\mu \text{ und } \int_\Omega \alpha f^-\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f^-\,\mathrm{d}\mu$$

also

$$\alpha \int f\,\mathrm{d}\mu = \alpha \int f^+\,\mathrm{d}\mu - \alpha \int f^-\,\mathrm{d}\mu = \int \alpha f^+\,\mathrm{d}\mu - \int \alpha f^-\,\mathrm{d}\mu = \int \alpha f\,\mathrm{d}\mu$$

Weiter gilt $(-f) = (-f)^+ - (-f)^- = f^- - f^+$, also

$$\int (-f)\,\mathrm{d}\mu = \int (-f)^+\,\mathrm{d}\mu - \int (-f)^-\,\mathrm{d}\mu = \int f^-\,\mathrm{d}\mu - \int f^+\,\mathrm{d}\mu = -\int f\,\mathrm{d}\mu$$

Damit ist alles gezeigt.

□

11.5.7 Satz von der majorisierten Konvergenz

Satz 11.5.12 (Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz)**.** Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $f, f_n : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ (Σ-Borel-)messbar, $g : \Omega \to [0, \infty]$ μ-integrierbar mit $|f_n| \leq g$ μ-f. ü. auf Ω für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \to f$ punktweise μ-f. ü. auf Ω. Dann sind f und alle f_n integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu$$

Beweis. Da $|f_n| \leq g$ μ-f. ü., folgt $|f| \leq g$ μ-f. ü., und da g integrierbar ist, sind auch f und alle f_n integrierbar. Damit sind f und jedes f_n nur auf Nullmengen $= \infty$. Die Vereinigung all dieser Nullmengen bezeichnen wir mit $N \in \Sigma$ und setzen

$$h_n : \Omega \to [0, \infty]\,, \quad h(x) = \begin{cases} |f(x) - f_n(x)|\,, & x \in \Omega \setminus N \\ 0, & x \in N \end{cases}$$

Weiterhin sei $h := 2g$. Klar ist: die h_n sind Σ-Borel-messbare Funktionen mit $h_n \to 0$ punktweise f. ü. auf Ω und $0 \leq h_n = |f - f_n| \leq |f| + |f_n| \leq 2g = h$ μ-f. ü. auf Ω. Da h integrierbar ist, sind alle h_n integrierbar. Wegen

$$\left|\int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu\right| = \left|\int_\Omega f - f_n\,\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_\Omega |f - f_n|\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega h_n\,\mathrm{d}\mu$$

Es genügt also $\int_\Omega h_n \,\mathrm{d}\mu \to 0$ zu zeigen. $\liminf_{n\to\infty} (h - h_n)$ ist messbar und μ-f. ü. $= h$, also integrierbar, und es gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega h \,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \liminf_{n\to\infty} (h - h_n) \,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega h - h_n \,\mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega h \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega h_n \,\mathrm{d}\mu \\
&= \int_\Omega h \,\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int_\Omega h_n \,\mathrm{d}\mu
\end{aligned}$$

also

$$\limsup_{n\to\infty} \int_\Omega h_n \,\mathrm{d}\mu \leq 0$$

Aber es ist $h_n \geq 0$ und damit $\int_\Omega h_n \,\mathrm{d}\mu \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h. es gilt sogar

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega h_n \,\mathrm{d}\mu = 0$$

□

Korollar 11.5.13. Seien (Ω, Σ, μ) ein endlicher Maßraum, d. h. $\mu(\Omega) < \infty$. Wenn $f_n, f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ Σ-Borel-messbare Funktionen sind und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-f. ü. gleichmäßig auf Ω beschränkt ist, d. h.

$$\exists\, c > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, |f_n| \leq c \quad \mu\text{-f. ü. auf } \Omega$$

und $f_n \to f$ punktweise μ-f. ü. auf Ω, dann sind alle f_n und f μ-integrierbar und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$$

Beweis. Die konstante Funktion $g = c$ ist auf Ω wegen $\mu(\Omega) < \infty$ integrierbare Majorante von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Die Behauptung folgt nun aus Lebesgues Satz über die dominierte Konvergenz. □

11.5.8 Parameterintegrale

Satz 11.5.14. Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $f : \Omega \times \,]a, b[\, \to \mathbb{R}$ eine Funktion und $f(\cdot, t) : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Σ-Borel-messbare Funktion für alle $t \in \,]a, b[$.

i) Ist $f(\omega, \cdot)$ stetig in $t_0 \in \,]a, b[$ für fast alle $\omega \in \Omega$ und gibt es eine Umgebung U von t_0 in $]a, b[$ und eine μ-integrierbare Funktion $g : \Omega \to [0, \infty]$ so, dass
$$\forall\, t \in U \,:\, |f(\omega, t)| \leq g(\omega) \quad \text{für fast alle } \omega \in \Omega$$
Dann ist die Funktion $F : U \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_\Omega f(\omega, t) \,\mathrm{d}\mu(\omega)$ stetig in t_0 und es gilt
$$\lim_{t\to t_0} \int_\Omega f(\omega, t) \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f(\omega, t_0) \,\mathrm{d}\mu$$

ii) Falls $f(\cdot, t_0)$ für ein $t_0 \in \,]a, b[$ μ-integrierbar ist, $\frac{\partial f}{\partial t}$ auf $\Omega \times \,]a, b[$ existiert und eine μ-integrierbare Funktion $g :\ \Omega \to [0, \infty]$ mit

$$\forall\, t \in \,]a, b[\ :\ \left|\frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)\right| \leq g(\omega) \quad \text{für fast alle } \omega \in \Omega,$$

dann ist $F(t) = \int_\Omega f(\omega, t)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$ differenzierbar in $]a, b[$ und

$$F'(t) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$$

Beweis.

i) Da für alle $t \in \,]a, b[$ gilt: $|f(\cdot, t)| \leq g$ μ-f. ü. auf Ω, folgt, dass $F(t)$ wohldefiniert ist.

   Sei nun $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \,]a, b[$ eine Folge mit $t_n \to t_0$. O. B. d. A. können wir annehmen, dass alle $t_n \in U$ liegen. Definiere $f_n(\omega) = f(\omega, t_n)$, $\omega \in \Omega$, für jedes $n \in \mathbb{N}$. Dann sind alle f_n messbar und es gilt $|f_n| \leq g$ μ-f. ü. auf Ω für alle $n \in \mathbb{N}$ und $f_n \to f(\cdot, t_0)$ punktweise μ-f. ü. auf Ω. Mit dem Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz folgt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f(\omega, t_n)\,\mathrm{d}\mu(\omega) = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f(\omega, t_0)\,\mathrm{d}\mu(\omega)$$

ii) Da

$$\frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t) = \lim_{t_n\to t, t_n\neq t} \underbrace{\frac{f(\omega, t_n) - f(\omega, t)}{t_n - t}}_{\text{messbar in } \omega} \quad \forall\, \omega \in \Omega,\ t \in \,]a, b[\,,$$

   folgt zunächst einmal, dass $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)\ :\ \Omega \to \mathbb{R}$ für jedes $t \in \,]a, b[$ eine Σ-Borel-messbare Funktion ist. Wegen $\left|\frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t)\right| \leq g(\omega)$ für fast alle $\omega \in \Omega$ gilt und g integrierbar ist, ist auch $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)$ für jedes $t \in \,]a, b[$ integrierbar. Weiter folgt aus dem Mittelwertsatz der Differenzialrechnung, dass für alle $t \in [a, b] \setminus \{t_0\}$ ein s zwischen t und t_0 so existiert, dass

$$f(\omega, t) - f(\omega, t_0) = \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, s)(t - t_0)$$

   gilt. Es folgt

$$|f(\omega, t)| \leq |f(\omega, t_0)| + g(\omega)\,|t - t_0| \qquad \text{für fast alle } \omega \in \Omega$$

   Die Summanden auf der rechten Seite sind integrierbar (in ω), also ist auch $|f(\cdot, t)|$.

   Seien $t_n \neq t$, $t_n, t \in \,]a, b[$ für $n \in \mathbb{N}$ mit $t_n \to t$, dann gilt

$$\frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \int_\Omega \underbrace{\frac{f(\omega, t_n) - f(\omega, t)}{t_n - t}}_{\to \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t) \text{ für } n\to\infty} \mathrm{d}\mu(\omega)$$

Nach dem Mittelwertsatz gilt wieder für jedes $n \in \mathbb{N}$

$$\left| \frac{f(\omega, t_n) - f(\omega, t)}{t_n - t} \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, s) \right| \leq |g(\omega)| \quad \text{für fast alle } \omega \in \Omega$$

Nach dem Satz von Lebesgue über die dominierte Konvergenz folgt nun

$$\begin{aligned} F'(t) &= \lim_{n\to\infty} \frac{F(t_n) - F(t)}{t_n - t} = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega \frac{f(\omega, t_n) - f(\omega, t)}{t_n - t} \, \mathrm{d}\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \frac{f(\omega, t_n) - f(\omega, t)}{t_n - t} \, \mathrm{d}\mu(\omega) = \int_\Omega \frac{\partial f}{\partial t}(\omega, t) \, \mathrm{d}\mu(\omega) \end{aligned}$$

□

11.5.9 Riemann-Integral und Lebesgue-Integral

Alle Ergebniss der vorhergehenden Kapitel sind für $(\Omega, \Sigma, \mu) = (\mathbb{R}^N, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N), \lambda^N)$ (bzw. $(A, \mathcal{L}(A), \lambda^N|_A)$ für $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ anwendbar.

Die Funktion $f = \chi_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ auf $\Omega = [0,1]$ ist Lebesgue-messbar und $= 0$ λ-f. ü. auf Ω, womit f Lebesgue-integrierbar ist mit $L - \int_\Omega f \, \mathrm{d}\lambda = 0$. Aber f ist nirgends stetig auf Ω, also ist f nicht Riemann-integrierbar.

Es gilt aber folgender

Satz 11.5.15. Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $(\Omega, \Sigma, \mu) = ([a,b], \mathcal{L}([a,b]), \lambda|_{[a,b]})$ und $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Es gilt

i) f ist R-integrierbar $\iff \lambda\left(\{\text{Unstetigkeitsstellen von } f\}\right) = 0$.

ii) Ist f R-integrierbar, dann ist f auch Lebesgue-integrierbar, d. h. λ-integrierbar, und es gilt

$$R - \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = L - \int_\Omega f \, \mathrm{d}\lambda$$

Beweis.

i) Wir wissen bereits: f ist Riemann-integrierbar genau dann, wenn für jedes $\epsilon > 0$ eine Intervallfolge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ existiert mit

$$U = \{\text{Unstetigkeitsstellen von } f\} \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ und } \sum_{n=1}^{\infty} |I_n| < \epsilon$$

„$\Rightarrow$“: Wähle für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Folge $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Intervallen mit $U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n^m =: E_m$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |I_n^m| < \frac{1}{m}$. Es ist $|I_n^m| = \lambda(I_n^m)$ für alle $n, m \in \mathbb{N}$. Es gilt $U \subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} E_m$ und

$$\lambda\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} E_m\right) \leq \lambda(E_m) < \frac{1}{m} \quad \forall\, m \in \mathbb{N}$$

d. h. $\lambda\left(\bigcap_{m\in\mathbb{N}} E_m\right) = 0$. Da $(\mathbb{R}, \mathcal{L}(\mathbb{R}), \lambda)$ ein vollständiger Maßraum ist, gilt auch $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$ mit $\lambda(U) = 0$.

„$\Leftarrow$“: Sei also U Lebesgue-messbar mit $\mu(U) = 0$. Per Definition ist

$$0 = \lambda(U) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(I_n) \mid I_n \in \mathcal{I} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, U \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n \right\},$$

womit sofort die Behauptung folgt.

ii) Da f nach unten beschränkt ist, kann man ein $C > 0$ finden, für dass $C + f \geq 0$ auf dem ganzen Intervall $[a, b]$ gilt. Man kann also o. B. d. A. im Folgenden annehmen, dass $f \geq 0$ auf $[a, b]$ gilt.

Ist f Riemann-integrierbar, so wurde in i) gezeigt, dass die Menge der Unstetigkeitsstellen eine Lebesgue-Nullmenge ist. f stimmt also λ-f. ü. mit einer stetigen Funktion überein, ist also zumindest messbar, da der betrachtete Maßraum vollständig ist.

Es gilt

$$\text{R-}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{b-a}{2^n} \inf f(I_{i,n}),$$

wobei $I_{i,n} := \left]a + i\frac{b-a}{2^n}, a + (i+1)\frac{b-a}{2^n}\right]$ für $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq i < 2^n$ seien. Betrachten wir

$$f_n : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{i=0}^{2^n-1} \inf f(I_{i,n}) \cdot \chi_{I_{i,n}}(x)$$

Die f_n sind als Treppenfunktionen offensichtlich λ-einfach und Riemann-integrierbar mit

$$\text{L-}\int_{[a,b]} f_n\,\mathrm{d}\lambda = \sum_{i=0}^{2^n-1} \frac{b-a}{2^n} \inf f(I_{i,n}) = \text{R-}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x =$$

Zudem gilt $f_n \nearrow f$ punktweise (sogar gleichmäßig) auf $[a, b]$, woraus mit dem Satz über die monotone Konvergenz die Lebesgue-Integrierbarkeit von f und

$$\text{L-}\int_{[a,b]} f\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \text{L-}\int_{[a,b]} f_n\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \text{R-}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x = \text{R-}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

folgt.

$\square$

Bemerkung.

1. Hierbei wurde eine dyadische Zerlegung gewählt, damit die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend wird.

2. Die in der Bemerkung am Anfang von ii) getroffene Annahme $f : [a, b] \to [0, \infty[$ war nötig, um den monotonen Konvergenzsatz in der Fassung aus der Vorlesung anzuwenden.

11.5.10 Uneigentliche Riemann-Integrale und das Lebesgue-Integral

Die Situation ist anders für uneigentliche Riemann-Integrale.

Betrachten wir zum Beispiel $f : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ für alle $x > 0$ und $f(x) = \lim_{x\to 0+0} f(x) = 1$, d. h. $(\Omega = [0,\infty[, \mathcal{L}(\Omega), \lambda|_\Omega)$. f ist stetig auf $[0,\infty[$, also ist f auf $[0,1]$ Riemann-integrierbar, und damit auch Lebesgue-integrierbar. Das Integral

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$$

konvergiert; das hatten wir in Analysis II gezeigt. Zur Erinnerung: Für $b \geq 1$ gilt

$$\int_1^b \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \left.\frac{-\cos x}{x}\right|_1^b - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \underbrace{\frac{-\cos b}{b}}_{\overset{b\to\infty}{\longrightarrow}0} + \frac{\cos 1}{1} - \int_1^b \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

Das letzte Integral konvergiert absolut nach Majorantenkriterium ($\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ ist absolut konvergent). Folglich ist f uneigentlich Riemann-integrierbar auf $[0,\infty[$.

f ist als stetige Funktion zwar λ-messbar, aber f ist nicht Lebesgue-integrierbar, denn es ist

$$\int_{[0,\infty[} f^+\,\mathrm{d}\lambda = \int_{[0,\infty[\frac{\sin^+(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda(x)}$$

Auf $[2n\pi, (2n+1)\pi]$ ist $\sin \geq 0$, also

$$\begin{aligned}
\ldots &= \sum_{n=0}^\infty \text{L-}\int_{[2n\pi,(2n+1)\pi]} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}\lambda(x) \\
&= \sum_{n=0}^\infty \text{R-}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \frac{\sin(x)}{x}\,\mathrm{d}x \\
&\geq \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)\pi} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin x\,\mathrm{d}x \\
&= \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)\pi}\text{R-}\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(2n+1)\pi} = \infty
\end{aligned}$$

d. h. $\int_{[0,\infty[} f^+\,\mathrm{d}\lambda = \infty$.

Bemerkung. Uneigentlich Riemann-integrierbare Funktionen müssen im Allgemeinen also nicht Lebesgue-integrierbar sein. Der Grund dafür ist, dass eine Funktion genau dann Lebesgue-integrierbar ist, wenn ihr Betrag es ist, wenn die Funktion also absolut Lebesgue-integrierbar ist.

Es gilt aber

Satz 11.5.16. Seien $c \in \mathbb{R} \cup \infty$, $a \in \mathbb{R}$ mit $a < c$. Sei weiter $f : [a,c[\to \mathbb{R}^+$ eine lokal beschränkte Funktion (d. h. f ist auf jedem Intervall $[a,b] \subseteq [a,c[$ beschränkt), die auf jedem $[a,b] \subseteq [a,c]$ Riemann-integrierbar ist. Dann gilt:

f ist Lebesgue-messbar und es gilt

$$\text{R-}\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{b \to c} \text{R-}\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \text{L-}\int_{[a,c[} f(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$$

Das uneigentliche Riemann-Integral R-$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existiert genau dann, wenn f λ-integrierbar ist.

Beweis. f ist Riemann-integrierbar auf jedem Intervall $[a,b] \subseteq [a,c]$, also ist f auch auf jedem dieser Intervalle messbar. Wähle eine Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,c[$ mit $b_n \nearrow c$, dann ist

$$f = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\chi_{[a,b_n]} \cdot f}_{\text{messbar}},$$

also ist f λ-messbar. $\left(\chi_{[a,b_n]} \cdot f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist sogar monoton wachsend, womit mit Hilfe des Satzes 11.5.15 und mit dem Satz über die monotone Konvergenz folgt

$$\begin{aligned}
\text{R-}\int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x &= \lim_{n\to\infty} \text{R-}\int\limits_a^{b_n} f(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \text{L-}\int_{[a,b_n]} f\,\mathrm{d}\lambda = \lim_{n\to\infty} \text{L-}\int_{[a,c[} f \cdot \chi_{[a,b_n]}\,\mathrm{d}\lambda \\
&= \text{L-}\int_{[a,c[} \lim_{n\to\infty} f \cdot \chi_{[a,b_n]}\,\mathrm{d}\lambda = \text{L-}\int_{[a,c[} f\,\mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

□

11.5.11 Integrationstheorie im Komplexen

Bemerkung. Messbarkeit, Integrabilität und das Lebesgue-Integral kann man auch für komplexwertige Funktionen $f : \Omega \to \mathbb{C}$ erklären, wobei (Ω, Σ, μ) wie gewohnt ein Maßraum sei.

i) $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt Σ-Borel-messbar genau dann, wenn $\operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f : \Omega \to \mathbb{R}$ Σ-Borel-messbar sind.

ii) Eine Σ-Borel-messbare Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ heißt μ-integrierbar, falls $\operatorname{Re} f$ und $\operatorname{Im} f$ μ-integrierbar sind. In diesem Fall setzt man

$$L - \int_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega \operatorname{Re} f\,\mathrm{d}\mu + \mathrm{i}\int_\Omega \operatorname{Im} f\,\mathrm{d}\mu$$

Alle Ergebnisse und Sätze vorhergehender Kapitel, die nicht auf der Ordnungsstruktur von $\mathbb{R}$ beruhen, behalten ihre Gültigkeit für komplexwertige Funktionen. So gilt etwa Lebesgues Satz von der dominierten Konvergenz, aber natürlich nicht der Satz über die monotone Konvergenz.

11.6 Lebesgue-Räume

11.6.1 Definition der $\mathcal{L}^p$-Räume

Definition. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Für $1 \leq p < \infty$ setze

$$\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{K} \mid f \text{ messbar und } \int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu < \infty \right\}$$

Satz. $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist für jedes $1 \leq p < \infty$ ein $\mathbb{K}$-Vektorraum.

Beweis. Es ist klar, dass für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ und $\alpha \in \mathbb{K}$ auch $\alpha f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Seien nun $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, dann ist $f + g$ messbar und im Falle $p = 1$ gilt

$$|f+g| \leq |f| + |g| \;\Rightarrow\; \int_\Omega |f+g| \, \mathrm{d}\mu \leq \underbrace{\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu}_{<\infty} + \underbrace{\int_\Omega |g| \, \mathrm{d}\mu}_{<\infty} < \infty,$$

also $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Im Fall $p > 1$ bemerken wir für $a, b \in \mathbb{K}$

$$|a+b|^p \leq (|a| + |b|)^p \leq (2 \max\{|a|, |b|\})^p = 2^p \max\{|a|^p, |b|^p\} \leq 2^p \left(|a|^p + |b|^p\right)$$

Auf $f + g$ angewendet folgt

$$\int_\Omega |f+b|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega 2^p \left(|a|^p + |b|^p\right) \mathrm{d}\mu = 2^p \left(\int_\Omega |a|^p \, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega |b|^p \, \mathrm{d}\mu \right) < \infty,$$

d. h. $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. $\square$

11.6.2 $\mathcal{L}^p$-Halbnormen

Definition. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum. Eine Funktion $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ heißt **Halbnorm**, wenn gilt

i) $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\|$ für alle $\alpha \in \mathbb{K}$, $v \in V$.

ii) $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ für alle $v, w \in V$.

Definition. Für $1 \leq p < \infty$ heißt

$$\|\cdot\|_p : \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) \to \mathbb{R}^+, \quad f \mapsto \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$\mathcal{L}^p$-Halbnorm auf $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

$\|\cdot\|_p$ ist tatsächlich eine Halbnorm: Sie ist wohldefiniert, denn es ist

$$\|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$$

für alle $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, und offensichtlich ist i) aus der Definition einer Halbnorm erfüllt. Für $p = 1$ ist auch die Dreiecksungleichung klar:

$$\|f+g\|_1 = \int_\Omega |f+g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega |f| + |g| \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu \int_\Omega |g| \, \mathrm{d}\mu = \|f\|_1 + \|g\|_1$$

Für den Fall $p > 1$ brauchen wir zunächst

Satz 11.6.1 (Hölder'sche Ungleichung)**.** Seien $1 < p < \infty$, $q = \frac{p}{p-1}$ (d. h. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; q heißt der **zu p konjugierte Exponent**). Weiter seien $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \Sigma, \mu)$. Dann gilt: $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$ und

$$\int_\Omega |f \cdot g| \, \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_p \cdot \|g\|_q = \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\int_\Omega |f|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}}$$

Im Falle $p = q = 2$ heißt diese Ungleichung **Cauchy-Schwarz-Ungleichung**. Man vergleiche Bezeichnungen und den Beweis mit den entsprechenden Ergebnissen für Summen/Reihen.

Beweis. Erinnerung: Sei $I \subseteq \mathbb{R}$ ein offenes Intervall. Eine Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall \, \lambda \in [0,1] \, , \, x, y \in I$$

f heißt konvex, wenn $-f$ konkav ist.

Die Funktion $\ln : \,]0, \infty[\, \to \mathbb{R}$ ist konkav (denn $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ für alle $x > 0$). Somit gilt für alle $\lambda \in [0,1]$, $x, y \in \,]0, \infty[$

$$\ln(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq \lambda \ln(x) + (1-\lambda)\ln(y) \overset{\mathrm{e}^x}{\Rightarrow} \lambda x + (1-\lambda) y \geq x^\lambda y^{(1-\lambda)}$$

Setze

$$A := \int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu, \quad B := \int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu$$

O. B. d. A. darf man $A, B > 0$ annehmen, für $A = 0$ oder $B = 0$ ist die Aussage trivial, da dann $|f| = 0$ bzw. $|g| = 0$ μ-f. ü. gilt, also auch $|f \cdot g| = 0$ μ-f. ü., womit die linke Seite $= 0$ ist.

Nun wenden wir die zuvor bewiesene Ungleichung mit

$$\lambda = \frac{1}{p}, \quad x = \frac{|f(\omega)|^p}{A}, \quad y = \frac{|g(\omega)|^q}{B}$$

an:

$$\frac{1}{p} \frac{|f(\omega)|^p}{A} + \frac{1}{q} \frac{|g(\omega)|^q}{B} \geq \left(\frac{|f(\omega)|^p}{A} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\frac{|g(\omega)|^q}{B} \right)^{\frac{1}{q}} = \frac{|f(\omega)|}{A^{\frac{1}{p}}} \frac{|g(\omega)|}{B^{\frac{1}{q}}}$$

Daraus folgt

$$\underbrace{\frac{1}{p \cdot A} \underbrace{\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu}_{=A} + \frac{1}{q \cdot B} \underbrace{\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu}_{=B}}_{= \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1} \geq \frac{1}{A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}}} \int_\Omega |f \cdot g| \, \mathrm{d}\mu$$

also

$$\left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^q \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}} = A^{\frac{1}{p}} B^{\frac{1}{q}} \geq \int_\Omega |f \cdot g| \, \mathrm{d}\mu$$

Wegen $\|f\|_p \, , \|g\|_q < \infty$ folgt $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$. □

Aus der Hölder'schen Ungleichung folgt

Korollar 11.6.2 (Minkowski-Ungleichung)**.** Seien $1 \leq p < \infty$, $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Dann gilt $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ und

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = \|f\|_p + \|g\|_p$$

Sie liefert den noch ausstehenden Nachweis der Gültigkeit der Dreiecksungleichung der $\mathcal{L}^p$-Halbnormen.

Beweis. $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ haben wir weiter oben schon gezeigt. Für $p = 1$ ist die Ungleichung klar. Für $p > 1$ gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega |f+g| \cdot |f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \int_\Omega |f|\,|f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |g|\,|f+g|^{p-1} \,\mathrm{d}\mu\end{aligned}$$

Setze $q = \frac{p}{p-1}$, dann gilt wegen $f+g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$: $|f+g|^{p-1} \in \mathcal{L}^q(\Omega, \Sigma, \mu)$. Da zudem $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ gilt, kann man die Hölder'sche Ungleichung anwenden:

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu &\leq \|f\|_p \left\||f+g|^{p-1}\right\|_q + \|g\|_p \left\||f+g|^{p-1}\right\|_q \\ &\leq \left(\|f\|_p + \|g\|_p\right) \left(\int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q}}\end{aligned}$$

Daraus folgt wegen $1 - \frac{1}{q} = \frac{1}{p}$

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \|f\|_p + \|g\|_p$$

□

11.6.3 Die Halbnorm ist im Allgemeinen keine Norm

Eine Halbnorm unterscheidet sich von einer Norm nur dadurch, dass die Definitheit möglicherweise verletzt ist. Konkret gilt in unserem Fall für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ mit $\|f\|_p = 0$ nur, dass $f = 0$ μ-f. ü. Existieren in Σ also nicht-triviale Nullmengen, so ist $\|\cdot\|_p$ kein Norm. Ist dagegen $\emptyset$ die einzige μ-Nullmenge, dann ist $\|\cdot\|_p$ eine Norm auf $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Beispiel Betrachte $(\Omega, \Sigma, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei μ das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sei. In diesem Fall ist $\emptyset$ die einzige μ-Nullmenge. Hier schreibt man anstatt $\mathcal{L}^p(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$

$$\ell^p(\mathbb{N}) = \left\{ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid a_n \in \mathbb{K}, \sum_{n=1}^{\infty} |\alpha_n|^p < \infty \right\}$$

Dieser Raum heißt **kleiner ℓ^p-Raum**. $\ell^p(\mathbb{N})$ ist demnach ein normierter $\mathbb{K}$-Vektorraum mit Norm $\|\cdot\|_p = (\sum_{n=1}^{\infty} |\cdot|^p)^{\frac{1}{p}}$.

Aber im allgemeinen Fall ist (Ω, Σ, μ) ein Maßraum mit nicht-trivialen μ-Nullmengen.

11.6.4 Faktorräume

Satz. Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum mit einer Halbnorm $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$. Definiere

$$N = \{v \in V \mid \|v\| = 0\}$$

Dann ist N ein Untervektorraum von V, also V/U ein Vektorraum, und

$$\|\cdot\|_p : V/N \to \mathbb{R}^+, \quad [v] \mapsto \|v\|$$

ist eine Norm auf V/U.

Beweis. N ist ein Untervektorraum von V: $0 \in N$ ist klar; seien $v, w \in N$, dann ist $0 \leq \|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| = 0$, also $\|v + w\| = 0$, d. h. $v + w \in N$; sei $\alpha \in \mathbb{K}$ und $v \in N$, dann gilt $\|\alpha v\| = |\alpha| \, \|v\| = 0$, d. h. $\alpha v \in N$.

Seien $v, w \in V$ mit $[v] = [w]$, d. h. $v - w \in N$, also $\|v - w\| = 0$, dann gilt

$$\|[v]\| = \|v\| = \|v - w + w\| \leq \|v - w\| + \|w\| = \|w\| = \|[w]\|$$

Aus Symmetriegründen folgt $\|[w]\| \leq \|[v]\|$, also $\|[v]\| = \|[w]\|$, womit die Wohldefiniertheit von $\|\cdot\| : V/N \to \mathbb{R}^+$ gezeigt ist. Außerdem ist es eine Norm: Homogenität und Dreiecksungleichung folgen leicht daraus, dass $\|\cdot\| : V \to \mathbb{R}^+$ eine Halbnorm ist. Zur Definitheit: Sei $v \in V$, dann gilt

$$\|[v]\| = 0 \Leftrightarrow \|v\| = 0 \Leftrightarrow v \in N \Leftrightarrow [v] = [0]$$

$\square$

Die Partition V/N wird induziert durch die Äquivalenzrelation

$$v \sim w \Leftrightarrow [v] = [w] \Leftrightarrow v - w \in N \Leftrightarrow \|v - w\| = 0$$

11.6.5 Definition der L^p-Räume

Für unsere $\mathcal{L}^p$-Räume $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ heißt das konkret: Wir nennen zwei Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ **μ-äquivalent**, falls $\|f - g\| = 0 \iff f - g = 0$ μ-f. ü. auf $\Omega \iff f = g$ μ-f. ü. auf Ω.

Definition. Für $1 \leq p < \infty$ setzen wir $N_p = \Big\{ f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) : \|f\|_p = 0 \Big\}$. Die sogenannten **Lebesgue-Räume** bezeichnen wir mit $L^p := \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)/N_p$.

Mit der Norm

$$\|\cdot\|_p : L^p(\Omega, \Sigma, \mu) \to \mathbb{R}^+, \quad \|[f]\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

wird $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ zu einem normierten Vektorraum.

Bemerkung. Die Elemente von $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ sind keine Funktionen, sondern Äquivalenzklassen von Funktionen. In der Praxis unterscheidet man aber nicht zwischen Funktionen und ihren Äquivalenzklassen. So schreibt man $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ an Stelle von $[f] \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, und $\|f\|_p$ an Stelle von $\|[f]\|_p$.

Dabei ist zu beachten, dass für $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ und $\omega \in \Omega$ der Ausdruck $f(\omega)$ nicht definiert ist, sofern $\mu(\{\omega\}) = 0$. Folglich können Elemente aus $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ im Allgemeinen „nicht punktweise ausgewertet“ werden. Wählt man allerdings einen Repräsentanten $\overline{f} \in [f]$, dann kann $\overline{f}(\omega)$ betrachtet werden.

11.6.6 Die Lebesgue-Räume sind vollständig

Satz 11.6.3. Seien (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $1 \leq p < \infty$. Dann gilt:

$$\boxed{(L^p(\Omega, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_p) \text{ ist ein Banachraum.}}$$

Beweis. Sei $([f_n])_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ eine Cauchy-Folge, d. h.

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \,:\, \|f_n - f_m\|_p < \epsilon \quad \forall\, n, m \geq n_0$$

Somit existiert eine Teilfolge $(g_k)_k$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$\|g_{k+1} - g_k\|_p < \frac{1}{2^k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Definiere nun

$$g \,:\, \Omega \to [0, \infty]\,, \quad g(\omega) = |g_1(\omega)| + \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1}(\omega) - g_k(\omega)| \quad \forall\, \omega \in \Omega$$

Dann ist g Σ-Borel-messbar. Weiter gilt

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |g|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_\Omega \lim_{n\to\infty} \left(|g_1| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k| \right)^p \mathrm{d}\mu \\
&\leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega \left(|g_1| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k| \right)^p \mathrm{d}\mu \\
&= \liminf_{n\to\infty} \left\| |g_1| + \sum_{k=1}^{n} |g_{k+1} - g_k| \right\|_p^p \\
&= \left(\|g_1\|_p + \left\| \sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1} - g_k| \right\|_p \right)^p \leq \left(\|g_1\|_p + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right)^p < \infty
\end{aligned}$$

Also ist $g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. Insbesondere folgt $g^p = |g|^p < \infty$ μ-f. ü. und somit $g < \infty$ μ-f. ü. Es gibt also eine μ-Nullmenge $E \in \Sigma$ so, dass $\sum_{k=1}^{\infty} |g_{k+1} - g_k|$ auf $\Omega \setminus E$ konvergiert. Dann konvergiert auch

$$\left(g_1 + \sum_{k=1}^{n} (g_{k+1} - g_k) \right)_n = (g_n)_n\,,$$

punktweise auf $\Omega \setminus E$. Setze nun

$$f(\omega) = \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} g_n(\omega), & \omega \in \Omega \setminus E \\ 0, & \omega \in E \end{cases}$$

Dann gilt

- $f \,:\, \Omega \to \mathbb{R}$ ist messbar.
- Da g_n punktweise μ-f. ü. auf Ω gegen f konvergiert, gilt auch $|g_n|^p \to |f|^p$ punktweise μ-f. ü. auf Ω.

- Da $|g_n|^p \leq g^p$ punktweise μ-f. ü. auf Ω gilt, folgt $|f|^p \leq g^p \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ μ-f. ü. auf Ω. Damit ist $\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu < \infty$, also $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$.
- $|g_n - f|^p \to 0$ μ-f. ü. auf Ω und

$$|g_n - f|^p \leq 2^p \left(|g_n|^p + |f|^p\right) \leq 2^p g^p \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$$

Mit Lebesgues Satz über die dominierte Konvergenz folgt

$$\int_\Omega |g_n - f|^p \,\mathrm{d}\mu \to 0,$$

d. h. aber gerade, dass $\|g_n - f\|_p \to 0$ für $n \to \infty$.

Da $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist, und $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist, folgt die Konvergenz der gesamten Folge $([f_n])_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $[f]$ in $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$. □

11.6.7 Der L^∞-Raum

Definition. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Wir definieren

$$\mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) := \{f : \Omega \to \mathbb{K} \mid f \text{ ist messbar}, \exists\, K \geq 0 : \mu(\{|f| > K\}) = 0\}$$

Das ist also die Menge aller „μ-f. ü. beschränkten" Funktion.

Definition. Für $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ definiert man

$$\|\cdot\|_\infty : \mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \to \mathbb{R}^+, \quad \|f\|_\infty := \inf\{K \geq 0 \mid \mu(\{|f| > K\}) = 0\}$$

Bemerkung. Es gilt $\|f\|_\infty = \inf\limits_{\substack{N\in\Sigma,\\ \mu(N)=0}} \sup\limits_{\Omega\setminus N} |f|$ und dieses Infimum wird angenommen.

Beweis. Zeige zunächst die Gleichheit:

Sei $N \in \Sigma$ mit $\mu(N) = 0$. Dann ist $S := \sup_{\Omega\setminus N} |f| \geq 0$ und $\{|f| > S\} \subseteq N$, also $\mu(\{|f| > S\}) = 0$, da $\{|f| > S\}$ eine messbare Teilmenge einer Nullmenge ist. Also gilt

$$\|f\|_\infty = \inf\{K > 0 \mid \mu(\{|f| > K\}) = 0\} \leq \sup_{\Omega\setminus N} |f|$$

Bildet man das Infimum über alle solche Mengen N, dann folgt „$\leq$".

Sei nun $K \geq 0$ mit $\mu(\{|f| > K\}) = 0$. Dann ist

$$\inf_{\substack{N\in\Sigma,\\ \mu(N)=0}} \sup_{\Omega\setminus N} |f| \leq \sup_{\Omega\setminus\{|f|>K\}} |f| = \sup_{\{|f|\leq K\}} |f| \leq K$$

Bildet man das Infimum über alle solche K, dann folgt „$\geq$".

Das Infimum wird auch angenommen, denn

$$\forall\, k \in \mathbb{N} \quad \exists\, N_k \in \Sigma,\, \mu(N_k) = 0 : |f|_\infty \leq \sup_{\Omega\setminus N_k} |f| \leq \|f\|_\infty + \frac{1}{k}$$

Wähle nun $N = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} N_k$, dann ist $N \in \Sigma$ mit $\mu(N) = 0$ und es gilt

$$\|f\|_\infty \leq \sup_{\Omega\setminus N} |f| \leq \sup_{\Omega\setminus N_k} |f| \leq \frac{1}{k} \quad \forall\, k \in \mathbb{N}$$

Für $k \to \infty$ folgt $\|f\|_\infty = \sup_{\Omega\setminus N} |f|$. □

Satz. $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ ist $\mathbb{K}$-Vektorraum und $\|\cdot\|_\infty$ eine Halbnorm darauf.

Beweis. Offensichtlich ist die Nullfunktion ein Element von $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Seien $\alpha \in \mathbb{K}$ und $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, dann ist $\alpha f + g$ eine messbare Funktion und es gibt $K, L \geq 0$ mit $\mu(\{|f| > K\}) = 0 = \mu(\{|g| > L\})$. Für $\omega \in \Omega$ gilt

$$\begin{aligned}&(|f(\omega)| \leq K) \wedge (|g(\omega)| \leq L) \qquad \Rightarrow\\ &|\alpha f(\omega) + g(\omega)| \leq |\alpha|\, |f(\omega)| + |g(\omega)| \leq |\alpha|\, K + L \leq 2 \max(|\alpha|\, K, L)\end{aligned}$$

oder die Kontraposition davon

$$|\alpha f(\omega) + g(\omega)| > 2 \max(|\alpha|\, K, L) \Rightarrow (|f(\omega)| > K) \vee (|g(\omega)| > L)$$

Folglich ist

$$\{|\alpha f + g| > 2 \max(|\alpha|\, K, L)\} \subseteq \{(|f| > K) \vee (|g| > L)\} = \{|f| > K\} \cup \{|g| > L\}$$

und damit
$$\mu(\{|\alpha f + g| > 2 \max(|\alpha|\, K, L)\}) = 0,$$
also $\alpha f + g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$. Das zeigt, dass $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ ein Untervektorraum von $\mathbb{K}^\Omega$ ist.

Weiterhin gilt

- Für $\alpha \in \mathbb{K}$, $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ gilt

$$\|\alpha f\|_\infty = \inf_{\substack{N \in \Sigma,\\ \mu(N)=0}} \sup_{\Omega \setminus N} |\alpha f| = |\alpha| \inf_{\substack{N \in \Sigma,\\ \mu(N)=0}} \sup_{\Omega \setminus N} |f| = |\alpha|\, \|f\|_\infty$$

- Für $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ gibt es $N_f, N_g \in \Sigma$ mit $\mu(N_f) = 0 = \mu(N_g)$ und

$$\|f\|_\infty = \sup_{\Omega \setminus N_f} |f|, \; \|g\|_\infty = \sup_{\Omega \setminus N_g} |g|$$

  Damit gilt

$$\begin{aligned}\|f\|_\infty + \|g\|_\infty &= \sup_{\Omega \setminus N_f} |f| + \sup_{\Omega \setminus N_g} |g|\\ &\geq \sup_{\Omega \setminus (N_f \cup N_g)} |f| + \sup_{\Omega \setminus (N_f \cup N_g)} |g|\\ &\geq \sup_{\Omega \setminus (N_f \cup N_g)} |f| + |g| \geq \sup_{\Omega \setminus (N_f \cup N_g)} |f + g|\\ &\geq \inf_{\substack{N \in \Sigma,\\ \mu(N)=0}} \sup_{\Omega \setminus N} |f + g| = \|f + g\|_\infty\end{aligned}$$

$\square$

Besitzt (Ω, Σ, μ) nur $\emptyset$ als μ-Nullmenge, so ist $\|\cdot\|_\infty$ eine Norm auf $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, denn es gilt allgemein

$$\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow \exists\, N \in \Sigma,\ \mu(N) = 0 : \sup_{\Omega \setminus N} |f| = 0, \text{ also } f = 0 \quad \mu\text{-f. ü. auf } \Omega$$

Die ist beispielsweise für $(\Omega, \Sigma, \mu) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), \mu)$, wobei μ das Zählmaß sei, der Fall. Wir schreiben

$$\ell^\infty(\mathbb{N}) = \left\{ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid \alpha_n \in \mathbb{K} \quad \forall\, n \in \mathbb{N}, \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha| < \infty \right\}$$

Die ist der $\mathbb{K}$-Vektorraum aller beschränkten Zahlenfolgen. Die $\|\cdot\|_\infty$-Norm lässt sich schreiben als

$$\left\| (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \right\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} |\alpha_n| \quad \forall\ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^\infty(\mathbb{N})$$

Im allgemeinen Fall, wenn (Ω, Σ, μ) nicht-triviale μ-Nullmengen besitzt, dann geht man wieder zu Äquivalenzklassen μ-äquivalenter Funktionen über:

$$L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) := \mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)/N_\infty,$$

wobei

$$N_\infty := \{ f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \mid \|f\|_\infty = 0 \}$$

Nebenbei bemerken wir, dass für alle $1 \le p \le \infty$ gilt

$$N_p = \left\{ f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) \mid \|f\|_p = 0 \right\} = \{ f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) \mid f = 0\ \mu\text{-f. ü.} \}$$

Damit ist auch das Integral für Elemente aus den Räumen $L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, $1 \le p \le \infty$ wohldefiniert.

Entsprechend ist

$$\|\cdot\|_\infty :\ L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu) \to \mathbb{R}^+, \quad \|[f]\|_\infty = \|f\|$$

eine Norm auf $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Satz 11.6.4. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum. Dann ist $(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_\infty)$ ein Banachraum.

Beweis. Sei $([f_n])_{n\in\mathbb{N}} \subset L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ eine Cauchy-Folge, d. h. es gilt

$$\forall\, \epsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \, :\, \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon \quad \forall\, n, m \ge n_0$$

Es gibt also für alle $n, m \in \mathbb{N}$ μ-Nullmengen $N_{n,m} \in \Sigma$ mit

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{\Omega\setminus N_{n,m}} |f_n - f_m|$$

Setze nun $N := \bigcup_{n,m\in\mathbb{N}} N_{m,n}$. Es ist $N \in \Sigma$ mit $\mu(N) = 0$, und es gibt für jedes $\epsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sup_{\Omega\setminus N} |f_n - f_m| \le \sup_{\Omega\setminus N_{n,m}} |f_n - f_m| = \|f_n - f_m\|_\infty < \epsilon \quad \forall\, n, m \ge n_0 \quad (*)$$

Somit ist die Folge der beschränkten, messbaren Funktionen $\left(f_n \cdot \chi_{\Omega\setminus N}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge im Raum $(B(\Omega \setminus N), \|\cdot\|_\infty)$ der beschränkten Funktionen mit der üblichen Supremumsnorm. Dieser Raum ist vollständig, d. h. es gibt ein $g \in B(\Omega \setminus N)$ so, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $\Omega \setminus N$ gleichmäßig gegen g konvergiert. Setze

$$f :\ \Omega \to \mathbb{R},\ f(\omega) = \begin{cases} g(\omega), & \omega \in \Omega \setminus N \\ 0, & \omega \in N \end{cases}$$

f ist eine Σ-Borel-messbare, beschränkte Funktion, d. h.

$$f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu) \Rightarrow [f] \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$$

Geht man in der Ungleichung aus $(*)$ zum Grenzwert für $m \to \infty$ über, so folgt

$$\|[f_n] - [f]\|_\infty \, \|f_n - f\|_\infty \leq \sup_{\Omega \setminus N} |f_n - f| \leq \epsilon \quad \forall n \geq n_0$$

d. h. $[f_n] \to [f]$ in $(L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu), \|\cdot\|_\infty)$. □

11.6.8 Beziehungen zwischen den L^p-Räumen

Zwischen den L^p-Räumen bestehen folgende Zusammenhänge:

Satz 11.6.5. Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum.

1. Die Höldersche Ungleichung gilt auch für $p = 1, q = \infty$:
$$\int_\Omega |f \cdot g| \, \mathrm{d}\mu \leq \|f\|_1 \, \|g\|_\infty \quad \forall f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu),\ g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$$
2. Sind (Ω, Σ, μ) ein endliche Maßraum und $1 \leq r \leq p$, dann gilt
$$L^p(\Omega, \Sigma, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \Sigma, \mu),$$
und $\|f\|_r \leq \|f\|_p \cdot \mu(\Omega)^s$ mit $s = \frac{1}{r} - \frac{1}{p}$, für alle $f \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, wobei wir hier $\frac{1}{\infty} := 0$ vereinbaren.
3. Für $1 \leq r \leq p$ gilt $\ell^r(\mathbb{N}) \subseteq \ell^p(\mathbb{N})$ und $\left\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p \leq \left\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_r$ für alle $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^r(\mathbb{N})$.
4. Für einen beliebigen Maßraum (Ω, Σ, μ) und $1 \leq p_1 \leq p \leq p_2 \leq \infty$ gilt
$$L^{p_1}(\Omega, \Sigma, \mu) \cap L^{p_2}(\Omega, \Sigma, \mu) \subseteq L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$$

Beweis. Zunächst bemerken wir, dass Aussagen wie

$$L^p(\Omega, \Sigma, \mu) \subseteq L^r(\Omega, \Sigma, \mu),$$

für entsprechende p, r, sinnvoll sind, da die $\mathcal{L}^p(\Omega, \Sigma, \mu)$ alle Untervektorräume von $\mathbb{K}^\Omega$ sind, und der aus diesen Räumen herausfaktorisierte Unterraum N stets derselbe ist.

1. Für $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \Sigma, \mu)$, $g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ gilt: $|g| \leq \|g\|_\infty$ μ-f. ü. auf Ω, also auch $|f \cdot g| \leq |f| \, \|g\|_\infty$ μ-f. ü. auf Ω. Daraus folgt
$$\int_\Omega |f \cdot g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega |f| \, \|g\|_\infty \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu = \|g\|_\infty \, \|f\|_1$$
2. Sei zunächst $1 \leq r \leq p < \infty$. Sei $[f] \in L^p(\Omega, \Sigma, \mu)$, dann gilt
$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^r \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega 1 \cdot |f|^r \, \mathrm{d}\mu &\leq \left(\int_\Omega 1 \, \mathrm{d}\mu\right)^{1-\frac{r}{p}} \left(\int_\Omega |f|^{r \cdot \frac{p}{r}} \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{r}{p}} \\ &= \mu(\Omega)^{\left(\frac{r}{r} - \frac{r}{p}\right)} \left(\left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}\right)^r = \left(\mu(\Omega)^{\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p}\right)}\right)^r \|f\|_p^r < \infty,\end{aligned}$$

also $f \in \mathcal{L}^r(\Omega, \Sigma, \mu)$ und

$$\|f\|_r \leq \mu(\Omega)^{\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{p}\right)} \|f\|_p$$

Für $r < p = \infty$ ($r = p = \infty$ ist trivial) gilt $|f| \leq \|f\|_\infty$ μ-f. ü. auf Ω, also auch $|f|^r \leq \|f\|_\infty^r$ μ-f. ü. auf Ω und damit

$$\int_\Omega |f|^r \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega \|f\|_\infty^r \,\mathrm{d}\mu = \|f\|_\infty^r \cdot \mu(\Omega) < \infty,$$

also auch $f \in \mathcal{L}^r(\Omega, \Sigma, \mu)$ und

$$\|f\|_r \leq \mu(\Omega)^{\frac{1}{r}} \|f\|_p$$

3. Wir betrachten zunächst $(\alpha)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^r(\mathbb{N})$ mit $\left\|(\alpha)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_r = \sum_{n=1}^\infty |\alpha|^r = 1$. Es können zwei Fälle auftreten: entweder es gibt ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|\alpha_{n_0}| = 1$, dann ist $\alpha_n = 0$ für alle $n \neq n_0$ und folglich ist

$$\sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^p = 1 = \sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^r$$

Oder für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $|\alpha_n| < 1$, dann ist wegen $r \leq q$: $|\alpha_n|^p \leq |\alpha_n|^r$ für alle $n \in \mathbb{N}$, also auch

$$\left\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p = \sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^p \leq \sum_{n=1}^\infty |\alpha_n|^r = \left\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_r = 1$$

Sei nun $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^r(\mathbb{N})$ beliebig $\neq 0$. Wir betrachten $(\tilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $\tilde{\alpha}_n = \frac{\alpha_n}{\left\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_r}$. Nach dem eben gezeigten gilt

$$\frac{\left\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p}{\left\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_r} = \left\|(\tilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p \leq \left\|(\tilde{\alpha}_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_r = \frac{\left\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_r}{\left\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_r} \quad \Leftrightarrow$$
$$\left\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_p \leq \left\|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\right\|_r$$

4. Sei $[f] \in L^{p_1}(\Omega, \Sigma, \mu) \cap L^{p_2}(\Omega, \Sigma, \mu)$, dann gilt

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu &= \int_{\{|f|\leq 1\}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu + \int_{\{|f|>1\}} |f|^p \,\mathrm{d}\mu \\ &\leq \underbrace{\int_{\{|f|\leq 1\}} |f|^{p_1} \,\mathrm{d}\mu}_{<\infty} + \underbrace{\int_{\{|f|>1\}} |f|^{p_2} \,\mathrm{d}\mu}_{<\infty} < \infty\end{aligned}$$

□

Literatur

[1] Růžička, Michael: *Nichtlineare Funktionalanalysis: Eine Einführung*, Seiten 26–27. Springer, 2004.

[2] Růžička, Michael: *Nichtlineare Funktionalanalysis: Eine Einführung*. http://www.mathematik.uni-freiburg.de/IAM/homepages/rose/springer.html, Seite 36, 2004.

[3] Schmitz, Stephan: *Die Fixpunktsätze von Brouwer und Schauder*. http://www.b-oberholz.de/schmitz/fixpunkte.ps, 1999. Skript eines Funktionalanalysis Seminars.

[4] Schultz, Carsten: *Skript zur Vorlesung Topologie I, Abschnitt 2*. http://carsten.codimi.de/top0809/top0809-02.pdf, Seite 6, 2008.

[5] Zeidler, Eberhard: *Fixed point theorems*. Nummer 1 in *Nonlinear functional analysis and its applications*. Springer, 1998.