Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski Wintersemester 2008/09
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

Lösungsskizze

zur Analysis III - Klausur vom 12.02.09

---

1. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme alle Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ auf der Kugeloberfläche

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9\}.$$

Beweis. $\boxed{4}$

Es sei $g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ und aus $\operatorname{grad} f = \lambda \cdot \operatorname{grad} g$ erhalten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 1 &= \lambda 2x \\ -2 &= \lambda 2y \\ 2 &= \lambda 2z \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad \begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2\lambda} \\ y &= -\tfrac{1}{\lambda} \\ z &= \tfrac{1}{\lambda} \end{aligned}$$

Einsetzen in g liefert

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 9 \quad \Longrightarrow \quad \lambda^2 = \frac{1}{4}.$$

Folglich erhalten wir die beiden kritischen Punkte $P_1 = (1, -2, 2)$ und $P_2 = (-1, 2, -2)$. Da K eine kompakte Menge und f stetig ist, nimmt f auf K sein Minimum und Maximum an. Durch Vergleich der Funktionswerte, sieht man, dass f bei P_1 sein Minimum und bei P_2 sein Maximum annimmt. □

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg und $f : \Gamma_\gamma \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Zeige, dass

$$\left| \int_\gamma f \, \mathrm{d}s \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{x \in \Gamma_\gamma} |f(x)|.$$

Beweis. $\boxed{5}$

Es gilt zunächst:

$$\left| \int_\gamma f \, \mathrm{d}s \right| \leq \int_\gamma |f| \, \mathrm{d}s = \int_a^b |f(\gamma(t))| \, \mathrm{d}s(t) \leq \sup_{[a,b]} |f \circ \gamma| \cdot \int_a^b \mathrm{d}s(t) = \sup_{\gamma([a,b]) = \Gamma_\gamma} |f| \cdot \int_a^b \mathrm{d}s(t).$$

(i) Da γ als Weg eine stetige Abbildung ist, ist folglich $\Gamma_\gamma = \gamma([a, b])$ kompakt. Da weiterhin auch f stetig ist, nimmt f sein Maximum auf Γ_γ an und wir erhalten $\sup_{\Gamma_\gamma} |f| = \max_{\Gamma_\gamma} |f|$.

(ii) Die Weglängenfunktion s auf $[a, b]$ ist gegeben durch $s(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t = a, \\ s(a, t) & \text{für } t \in (a, b]. \end{cases}$

Es gilt also für jede Zerlegung $Z = \{a = t_0 < \cdots < t_n = b\}$:

$$\int_a^b \mathrm{d}s(t) = \sum_{i=1}^{n} s(t_i) - s(t_{i-1}) = s(b) - s(a) = s(b) = L(\gamma).$$

□

3. Aufgabe (6 Punkte)

Berechne das Volumen des Körpers

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{(1+z)^2},\ 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

Beweis. $\boxed{6}$

Der Körper S wird begrenzt von den Hyperebenen $\{z = 0\}$ und $\{z = 1\}$. Der Schnitt von S mit jeder Hyperebene $\{z = h\}$ für $h \in [0, 1]$ ist ein Kreis der Form

$$K_h = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{(1+h)^2} \right\}$$

mit der Fläche $v(K_h) = \pi \cdot \frac{1}{(1+h)^2}$. Somit folgt mit dem Prinzip von Cavalieri sofort:

$$v(S) = \int_0^1 v(K_h)\,\mathrm{d}h = \pi \int_0^1 \frac{1}{(1+h)^2}\,\mathrm{d}h = \pi \left[-\frac{1}{1+h} \right]_0^1 = \frac{\pi}{2}.$$

□

4. Aufgabe (12 Punkte)

Verifiziere die Aussage des Gaußschen Integralsatzes für das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}$$

und den Körper

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ -2 \leq z \leq 3\}.$$

Beweis. Es ist also zu zeigen, dass $\int_Z \operatorname{div} F \,\mathrm{d}(x, y, z) = \int_{\partial Z} F \cdot \vec{\eta}\,\mathrm{d}\sigma$.

(i) $\boxed{3}$ Berechne das Bereichintegral $\int_Z \operatorname{div} F \,\mathrm{d}(x, y, z)$:
Zur Parametrisierung des Zylinders Z verwende die Zylinderkoordinaten

$$\Phi(r, \varphi, h) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ h \end{pmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \det J_\Phi(r, \varphi, h) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

auf dem Parameterbereich $(r, \varphi, h) \in [0, 2] \times [0, 2\pi] \times [-2, 3]$. Mit Hilfe der Substitutionsregel und $\operatorname{div} F(x, y, z) = 2$ erhalten wir somit

$$\int_Z \operatorname{div} F \,\mathrm{d}(x, y, z) = \int_Z 2 \,\mathrm{d}(x, y, z) = \int_{-2}^3 \int_0^{2\pi} \int_0^2 2r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\varphi \,\mathrm{d}h = 5 \cdot 2\pi \cdot 4 = 40\pi.$$

(ii) $\boxed{9}$ Berechne nun das Oberflächenintegral $\int_{\partial Z} F \cdot \vec{\eta}\,\mathrm{d}\sigma$:
Zerlege hierzu den Rand ∂Z des Zylinders in seine zwei Deckflächen

$$\begin{aligned} D_1 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ z = -2\}, \\ D_2 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ z = 3\} \end{aligned}$$

und die Mantelfläche

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 = 4,\ -2 \le z \le 3\}.$$

Wähle die jeweiligen Parametrisierungen und entsprechenden Normalenvektoren:

$$\Phi_1(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \Phi_1([0,2]\times[0,2\pi]) = D_1, \quad \vec{\eta}_1 = \frac{\partial \Phi_1}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi_1}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\Phi_2(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \Phi_2([0,2]\times[0,2\pi]) = D_2, \quad \vec{\eta}_2 = \frac{\partial \Phi_2}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi_2}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix}$$

$$\Phi_3(\varphi,h) = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ h \end{pmatrix}, \quad \Phi_3([0,2\pi]\times[-2,3]) = M, \quad \vec{\eta}_3 = \frac{\partial \Phi_3}{\partial \varphi} \times \frac{\partial \Phi_3}{\partial h} = \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nun ist aber noch zu beachten, dass wir gerade die äußeren Normalenvektoren benötigen. Daher muss noch die Orientierung von $\vec{\eta}_1$ umgekehrt werden. Für die einzelnen Oberfächenintegrale erhalten wir dann:

$$\begin{aligned} \int_{D_1} F \cdot (-\vec{\eta}_1)\,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} F(\Phi_1(r,\varphi)) \cdot (-\vec{\eta}_1)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -r \end{pmatrix} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 4r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \cdot 8 = 16\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{D_2} F \cdot \vec{\eta}_2\,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} F(\Phi_2(r,\varphi)) \cdot \vec{\eta}_2\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^2 \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ r \end{pmatrix} \mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi \\ &= \int_0^2 \int_0^{2\pi} 6r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \cdot 12 = 24\pi. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{M} F \cdot \vec{\eta}_3\,\mathrm{d}\sigma &= \int_0^{2\pi} \int_{-2}^{3} F(\Phi_3(\varphi,h)) \cdot \vec{\eta}_3\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}h = \int_0^{2\pi} \int_{-2}^{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2h \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2\cos\varphi \\ 2\sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix} \mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}h \\ &= \int_0^{2\pi} \int_{-2}^{3} 0\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}h = 0. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich so

$$\int_{\partial Z} F \cdot \vec{\eta}\,\mathrm{d}\sigma = \int_{D_1} F \cdot (-\vec{\eta}_1)\,\mathrm{d}\sigma + \int_{D_2} F \cdot \vec{\eta}_2\,\mathrm{d}\sigma + \int_{M} F \cdot \vec{\eta}_3\,\mathrm{d}\sigma = 16\pi + 24\pi + 0 = 40\pi.$$

□

5. Aufgabe (9 Punkte)

Seien S, $T \neq \emptyset$ Mengen und $f : S \to T$ eine Abbildung. Setze

$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{C}\} \quad \text{für } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(T).$$

Beweise die folgenden Aussagen:

a) Ist $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra in T, so ist $f^{-1}(\mathcal{B})$ eine σ-Algebra in S.

b) Ist $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(T)$, so ist

$$\mathcal{A} := \{B \subseteq T \mid f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$$

eine σ-Algebra in T.

c) Es gilt $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ für alle $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(T)$.

Beweis.

a) $\boxed{2}$ Sei $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(T)$ eine σ-Algebra.
Es ist $\emptyset \in f^{-1}(\mathcal{B})$, da $\emptyset \in \mathcal{B}$ und $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$.
Sei $B \in f^{-1}(\mathcal{B})$. Dann existiert ein $A \in \mathcal{B}$ mit $f^{-1}(A) = B$. Dann ist aber auch $T \setminus A \in \mathcal{B}$ und folglich

$$\begin{aligned} S \setminus B &= S \setminus f^{-1}(A) = S \setminus \{x \in S \mid f(x) \in A\} \\ &= \{x \in S \mid f(x) \notin A\} = f^{-1}(T \setminus A) \in f^{-1}(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq f^{-1}(\mathcal{B})$. Dann existiert $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{B}$ mit $f^{-1}(A_n) = B_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist aber auch $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{B}$ und daher

$$\begin{aligned} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n &= \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{x \in S \mid f(x) \in A_n\} \\ &= \{x \in S \mid f(x) \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\} = f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) \in f^{-1}(\mathcal{B}). \end{aligned}$$

Also ist $f^{-1}(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{P}(S)$ ebenfalls eine σ-Algebra.

b) $\boxed{2}$ Sei $\mathcal{A} = \{B \subseteq T \mid f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$.
Es ist $\emptyset \in \mathcal{A}$, da $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$.
Sei $B \in \mathcal{A}$. Dann gilt $f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ und daher auch

$$f^{-1}(T \setminus B) = S \setminus f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})).$$

Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$. Dann ist $f^{-1}(B_n) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und folglich

$$f^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(B_n) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})).$$

c) "$\subseteq$": $\boxed{2}$
Für alle $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(T)$ gilt $\mathcal{C} \subseteq \sigma(\mathcal{C})$ und folglich

$$f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})). \tag{*}$$

Da ausserdem $\sigma(\mathcal{C})$ eine σ-Algebra in T ist, folgt aus a), dass $f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ eine σ-Algebra in S ist. Mit (*) erhalten wir somit $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) \subseteq f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$.
"$\supseteq$": $\boxed{3}$
Wegen $f^{-1}(\mathcal{C}) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$ gilt $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$. Da nach b) $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra in T ist, folgt auch $\sigma(\mathcal{C}) \subseteq \mathcal{A}$. Somit erhalten wir das gewünschte Ergebnis

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) \subseteq f^{-1}(\mathcal{A}) = \{f^{-1}(B) \mid B \in \mathcal{A}\}) \subseteq \sigma(f^{-1}(\mathcal{C})).$$

$\square$

6. Aufgabe (8 Punkte)

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.
Beweise die folgenden Aussagen:

a) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon \quad \forall\, A \in \Sigma \text{ mit } \mu(A) < \delta.$$

(Hinweis: Betrachte die Folge $(\inf(|f|, n))_{n\in\mathbb{N}}$ <u>oder</u> die Folge $(|f| - \inf(|f|, n))_{n\in\mathbb{N}}$.)

b) Folgere aus a), dass für alle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Beweis.

a) $\boxed{6}$ Sei $f_n := \inf(|f|, n)$. Dann ist f_n als Infimum messbarer Funktionen wiederum messbar. Wegen $f_n \leq |f|$ besitzt f_n eine integrierbare Majorante und ist somit auch integrierbar. Weiterhin gibt es zu jedem $x \in \Omega$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|f(x)| \leq n$ für alle $n \geq n_0$ und folglich gilt $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = |f(x)|$ für alle $x \in \Omega$.

<u>Variante 1:</u> ($(\inf(|f|, n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit Beppo-Levi)
Da f_n eine monoton wachsende Folge integrierbarer Funktionen ist, die punktweise gegen die integrierbare Funktion $|f|$ konvergiert, gilt nach dem Satz von Beppo-Levi:

$$\lim_{n\to\infty} \int_A f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu \quad \forall\, A \in \Sigma.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\left| \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu - \int_A f_{n_0} \, \mathrm{d}\mu \right| = \int_A |f| \, \mathrm{d}\mu - \int_A f_{n_0} \, \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Andererseits gilt aber auch

$$\int_A f_{n_0} \, \mathrm{d}\mu \leq \int_A n_0 \, \mathrm{d}\mu = n_0 \mu(A) \quad \forall\, A \in \Sigma.$$

Daher erhalten wir für alle $A \in \Sigma$ mit $\mu(A) < \delta = \frac{\varepsilon}{2n_0}$:

$$\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \int_A f_{n_0} \, \mathrm{d}\mu \leq \frac{\varepsilon}{2} + n_0\mu(A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

<u>Variante 2:</u> ($(|f| - \inf(|f|, n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit Lebesgue)
Da $|f| - f_n$ integrierbar ist, punktweise gegen 0 konvergiert und wegen $0 \leq |f| - f_n \leq |f|$ eine integrierbare Majorante besitzt, gilt nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz:

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f| - f_n \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert also ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\int_\Omega |f| - f_{n_0} \, \mathrm{d}\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Andererseits gilt aber auch

$$\int_A f_{n_0} \,\mathrm{d}\mu \leq \int_A n_0 \,\mathrm{d}\mu = n_0 \mu(A) \quad \forall\, A \in \Sigma.$$

Daher erhalten wir $\mu(A) < \delta = \frac{\varepsilon}{2n_0}$:

$$\int_A |f| \,\mathrm{d}\mu = \int_A |f| - f_{n_0} \,\mathrm{d}\mu + \int_A f_{n_0} \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega |f| - f_{n_0} \,\mathrm{d}\mu + n_0 \mu(A) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

b) $\boxed{2}$ Sei $(A_n) \subseteq \Sigma$ mit $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = 0$. Dann existiert für alle $\delta > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\mu(A_n) < \delta \quad \forall n \geq n_0.$$

Sei $\varepsilon > 0$. Nach a) folgt dann sofort

$$\left| \int_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu \right| \leq \int_{A_n} |f| \,\mathrm{d}\mu < \varepsilon \quad \forall n \geq n_0,$$

also $\lim_{n\to\infty} \int_{A_n} f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

$\square$

(Gesamtpunktzahl: 44 Punkte)