Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Wintersemester 2008/09
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

Klausur zur VL Analysis III

12.02.2009

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Gebt bei allen Antworten eine Begründung bzw. einen Beweis an und verwendet für jede Aufgabe ein neues Blatt. Die Klausur dauert 120 Minuten und ist mit 22 Punkten bestanden.

Viel Erfolg!

Hiermit erkläre ich mich mit der Veröffentlichung meines Klausurergebnisses unter Angabe meiner Matrikelnummer auf der Homepage der Veranstaltung einverstanden.

Berlin, den 12.02.2009 .... (Unterschrift)

1	2	3	4	5	6	$\sum$

1. Aufgabe (4 Punkte)

Bestimme alle Extrema der Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = x-2y+2z$ auf der Kugeloberfläche

$$K = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 9\}.$$

2. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg und $f : \Gamma_\gamma \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Zeige, dass

$$\left| \int_\gamma f \, \mathrm{d}s \right| \leq L(\gamma) \cdot \max_{x \in \Gamma_\gamma} |f(x)|.$$

3. Aufgabe (6 Punkte)

Berechne das Volumen des Körpers

$$S = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 \leq \frac{1}{(1+z)^2},\ 0 \leq z \leq 1 \right\}.$$

4. Aufgabe (12 Punkte)
Verifiziere die Aussage des Gaußschen Integralsatzes für das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2z \end{pmatrix}$$

und den Körper

$$Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\ -2 \leq z \leq 3\}.$$

5. Aufgabe (9 Punkte)
Seien $S, T \neq \emptyset$ Mengen und $f : S \to T$ eine Abbildung. Setze

$$f^{-1}(\mathcal{C}) := \{f^{-1}(A) \mid A \in \mathcal{C}\} \quad \text{für } \mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(T).$$

Beweise die folgenden Aussagen:

a) Ist $\mathcal{B}$ eine σ-Algebra in T, so ist $f^{-1}(\mathcal{B})$ eine σ-Algebra in S.

b) Ist $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(T)$, so ist
$$\mathcal{A} := \{B \subseteq T \mid f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))\}$$
eine σ-Algebra in T.

c) Es gilt $\sigma(f^{-1}(\mathcal{C})) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C}))$ für alle $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(T)$.

6. Aufgabe (8 Punkte)
Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Funktion.
Beweise die folgenden Aussagen:

a) Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, so dass
$$\int_A |f| \, \mathrm{d}\mu < \varepsilon \quad \forall\, A \in \Sigma \text{ mit } \mu(A) < \delta.$$
(Hinweis: Betrachte die Folge $(\inf(|f|, n))_{n \in \mathbb{N}}$ *<u>oder</u> die Folge* $(|f| - \inf(|f|, n))_{n \in \mathbb{N}}$*.)*

b) Folgere aus a), dass für $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \Sigma$ gilt:
$$\lim_{n \to \infty} \mu(A_n) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} \int_{A_n} f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

(Gesamtpunktzahl: 44 Punkte)