Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold,
Martha Hubski, Alexandra Zimmermann

Modulprüfung zur VL Analysis I+II

13.10.2008

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

1. Aufgabe (Kompaktheit)
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Definieren Sie den Begriff der Kompaktheit und Folgenkompaktheit in (X, d).

2. Aufgabe (Satz von Heine Borel)
Formulieren Sie den Satz von Heine - Borel.

3. Aufgabe (Vollständigkeit)
Sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) Wann heißt (X, d) vollständig?

b) Formulieren und beweisen Sie den Banachschen Fixpunktsatz in (X, d).

4. Aufgabe (Stetigkeit)
Seien $(X, d), (X', d')$ metrische Räume.

a) Wann nennt man eine Abbildung $f : X \to X'$ in einem Punkt $p \in X$ stetig?

b) Formulieren und beweisen Sie einen der folgenden Sätze für Funktionen $f : X \to X'$:

  (i) verallgemeinerten Zwischenwertsatz,
  (ii) Kompaktheitssatz,
  (iii) Satz vom Minimum und Maximum.

5. Aufgabe (Differenzierbarkeit)
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachraüme, $U \subset X$ offen und $x_0 \in U$.

a) Definieren Sie den Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion $f : U \to Y$ in einem Punkt $x_0 \in U$.

b) Definieren Sie den Begriff der Richtungsableitung von f in einem Punkt $x_0 \in U$.

c) Sei $f : U \to Y$ differenzierbar auf U. Was gilt dann für die Richtungsableitungen von f? Beweisen Sie ihre Aussage.

d) Formulieren Sie den Satz von Schwarz. Was folgt daraus für die Hesse-Matrix?

e) Formulieren Sie den Umkehrsatz.

6. Aufgabe (Mittelwertsatz)

a) Formulieren Sie den Mittelwertsatz der Differentialrechnung in $\mathbb{R}$.

b) Leiten Sie daraus den Mittelwertsatz der Integralrechnung in $\mathbb{R}$ her.

c) Zeigen Sie durch ein Gegenbeispiel, dass ein zum Mittelwertsatz der Differentialrechnung analoges Resultat im $\mathbb{R}^N$ nicht gilt.

7. Aufgabe (Integration)

a) Formulieren Sie das Riemannsche Integrabilitätskriterium in $\mathbb{R}$.

b) Geben Sie ein Beispiel für eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ an, die nicht Riemann-integrierbar ist.

c) Geben Sie ein Beispiel einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ an, die nicht auf ganz $[a, b]$ stetig, aber Riemann-integrierbar ist.

d) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq R[a, c]$ für alle $c > a$. Wann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^c f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x \quad ?$$

8. Aufgabe (Reihen)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge.

a) Wann nennt man $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent?

b) Formulieren und beweisen Sie das Quotientenkriterium für Reihen.