Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold,
Martha Hubski, Alexandra Zimmermann

Modulprüfung zur VL Analysis I-III

20.04.2009

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

---

1. Aufgabe (Reihen)
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge.

a) Formulieren und beweisen Sie ein notwendiges (aber nicht hinreichendes) Kriterium für die Konvergenz von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

b) Zeigen Sie anhand eines Beispiels, dass dieses Kriterium nicht hinreichend ist.

2. Aufgabe (Kompaktheit)
Sei (X, d) ein metrischer Raum.

a) Definieren Sie den Begriff der Kompaktheit und Folgenkompaktheit von $S \subseteq (X, d)$.

b) Formulieren Sie den Satz von Heine - Borel (für $X = \mathbb{R}^N$).

3. Aufgabe (Stetigkeit)
Seien $(X, d), (X', d')$ metrische Räume und $f : X \to X'$ eine Abbildung.

a) Wann heißt f in einem Punkt $p \in X$ stetig?

b) Formulieren und beweisen Sie einen der folgenden Sätze:

   (i) verallgemeinerten Zwischenwertsatz,
   (ii) Kompaktheitssatz,
   (iii) Satz vom Minimum und Maximum (für $X' = \mathbb{R}$).

4. Aufgabe (Differenzierbarkeit)
Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume, $U \subseteq X$ offen und $f : U \to Y$ eine Abbildung.

a) Definieren Sie den Begriff der Differenzierbarkeit von f in einem Punkt $x_0 \in U$.

b) Definieren Sie den Begriff der Richtungsableitung von f in einem Punkt $x_0 \in U$.

c) Sei f differenzierbar in $x_0 \in U$. Was gilt dann für die Richtungsableitungen von f in x_0?

d) Formulieren Sie den Satz von Schwarz. Was folgt daraus für die Hesse-Matrix?

e) Formulieren Sie den Umkehrsatz.

5. Aufgabe (Wegintegration)
Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^N$ ein rektifizierbarer Weg und $F : D \subseteq \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ stetig mit $\Gamma_\gamma \subseteq D$.

a) Definieren Sie das Wegintegral von F längs des Weges γ.

b) Sei D ein Gebiet. Wann heisst F wegunabhängig in D bzw. ein Gradientenfeld?

c) Formulieren Sie ein notwendiges und ein hinreichendes Kriterium für die Wegunabhängigkeit von F.

6. Aufgabe (Riemann-Integration im $\mathbb{R}^N$)

a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^N$ ein kompakter Quader und $f : A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Abbildung. Formulieren Sie ein Integrabilitätskriterium für f über A.

b) Formulieren Sie den Satz von Cavalieri.

c) Formulieren und beweisen Sie einen der folgenden Sätze:

   (i) Satz von Gauss-Green in der Ebene,
   (ii) Stokescher Integralsatz,
   (iii) Gaußscher Divergenzsatz im Raum.

7. Aufgabe (Maßtheorie)
Erläutern Sie kurz in eigenen Worten wie in der Vorlesung das Lebesgue-Maß ausgehend vom N-dimensionalen Jordan-Inhalt konstruiert wurde.

8. Aufgabe (Lebesgue-Integration) Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine messbare Abbildung. Formulieren und beweisen Sie einen der folgenden Sätze:

a) Satz von Beppo-Levi,

b) Lemma von Fatou,

c) Konvergenzsatz von Lebesgue (dominierte Konvergenz).