Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

Wintersemester 2008/09

Lösungsskizze

zur Analysis III - Nachklausur vom 07.04.09

---

1. Aufgabe (6 Punkte)

Zeige mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem

$$y' = y\cos x, \quad y(0) = 1$$

genau eine Lösung auf dem Intervall $[-1/2, 1/2]$ besitzt.

Beweis.

Sei $f : [a,b] \times [1-r, 1+r] \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y\cos x$ mit geeignetem $r > 0$ und $0 \in]a,b[$. Dann ist f stetig und es gilt ausserdem

$$|f(x,y) - f(x,z)| = |y\cos x - z\cos x| = |\cos x||y-z| \leq 1 \cdot |y-z| \quad \forall\, x \in [a,b],\ \forall\, y,z \in [1-r, 1+r].$$

Somit ist f Lipschitz-stetig bzgl. y mit der Lipschitz-Konstanten $L = 1$.
Nach dem Satz von Picard-Lindelöf (lokale Version) existiert somit eine eindeutige Lösung des AWP auf einem Intervall $[-\alpha, \alpha]$ mit $\alpha = \min\left\{\frac{1}{2L}, \frac{r}{M}\right\} = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{r}{M}\right\}$. Hierbei ist

$$M = \sup_{x \in [a,b]} |f(x,1)| = \max_{x \in [a,b]} |\cos x| \leq 1$$

Wähle nun r und $[a,b]$, so dass $\alpha = \frac{1}{2}$. Also z.B. $r = 1$ und $[a,b] = [-1,1]$ (dann ist $M = 1$).
Bestimmung der Lösung mittels Separation der Variablen:

$$y' = y\cos x \quad \Rightarrow \quad \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \cos x\,\mathrm{d}x \quad \Rightarrow \quad \ln|y| = \sin x + c \quad \Rightarrow \quad y(x) = k \cdot e^{\sin x}.$$

Durch Einsetzen des Anfangswertes $y(0) = 1$ erhält man $k = 1$ und daher ist die eindeutige Lösung des AWP gegeben durch $y(x) = e^{\sin x}$. $\square$

2. Aufgabe (7 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \frac{1}{\|(x,y)\|^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

a) Zeige, dass F zwar die Integrabilitätsbedingung erfüllt, aber kein Gradientenfeld ist.

b) Bestimme ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, so dass

$$\int_\gamma F \, \mathrm{d}(x,y) = 0 \quad \text{für alle geschlossenen Wege } \gamma \text{ mit } \Gamma_\gamma \subseteq G$$

und begründe die Wahl von G.

Beweis.

a) Mit $F_1(x,y) = \frac{-y}{x^2+y^2}$ und $F_2(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ folgt sofort die Integrabilitätsbedingung

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{-(x^2+y^2)+2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2+y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{\partial F_2}{\partial x}.$$

Da allerdings $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ nicht einfach zusammenhängend ist, ist das Integrabilitätskriterium nicht hinreichend dafür, dass F ein Gradientenfeld ist. Wählt man z.B. den geschlossenen Weg

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi], \quad \Gamma_\gamma \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},$$

so gilt (da F stetig und γ stetig differenzierbar ist)

$$\int_\gamma F \, \mathrm{d}(x,y) = \int_0^{2\pi} F(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{pmatrix} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} 1 \, \mathrm{d}t = 2\pi \neq 0.$$

b) Damit F ein Gradientenfeld ist, ist es hinreichend (da F nach a) die Integrabilitätsbedingung erfüllt), dass $G \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.
Da jedes sternförmige (also insbesondere jedes konvexe) Gebiet einfach zusammenhängend ist, wähle z.B.

$$G = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x-1)^2 + (y-1)^2 < 1\} \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}.$$

(Achtung: Gebiete müssen per Definition offen und zusammenhängend sein!)

$\square$

3. Aufgabe (6 Punkte)
Berechne das Volumen des Körpers

$$R = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le R^2,\, x^2+y^2 \ge r^2\}, \quad (0<r<R).$$

Beweis.
Der Körper R stellt einen sog. sphärischen Ring dar, der entsteht, wenn aus einer Kugel ein Zylinder ausgeschnitten wird. R wird begrenzt von den Hyperebenen $\{z=-R\}$ und $\{z=R\}$. Der Schnitt von R mit jeder Hyperebene $\{z=h\}$ für $h \in [-R,R]$ ist ein Kreisring der Form

$$K_h = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \le x^2+y^2 \le R^2-h^2\}$$

mit der Fläche $v(K_h) = \pi(R^2-h^2) - \pi r^2 = \pi(R^2-r^2-h^2)$. Somit folgt mit dem Prinzip von Cavalieri:

$$\begin{aligned} v(R) &= \int_{-R}^{R} v(K_h)\,\mathrm{d}h = \pi \int_{-R}^{R} R^2-r^2-h^2\,\mathrm{d}h = \pi \left[(R^2-r^2)h - \frac{1}{3}h^3\right]_{-R}^{R} \\ &= \pi\left(2R(R^2-r^2) - \frac{2}{3}R^3\right) = 2\pi\left(\frac{2}{3}R^3 - r^2R\right). \end{aligned}$$

□

4. Aufgabe (9 Punkte)
Berechne das Wegintegral $\int_{\partial G} F\,\mathrm{d}(x,y,z)$ für das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x+z \end{pmatrix}$$

und das Flächenstück

$$G = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le \frac{\pi}{2},\, z = \sin y\right\}.$$

Beweis.

- <u>Direkte Berechnung:</u>
  Der Rand des Flächenstücks G wird beschrieben durch die vier Wegstücke

$$\gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\, t\in[0,1] \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma_1}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\, F(\gamma_1(t)) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ t \end{pmatrix}$$

$$\gamma_2(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ \sin t \end{pmatrix},\, t\in[0,\frac{\pi}{2}] \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma_2}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cos t \end{pmatrix},\, F(\gamma_2(t)) = \begin{pmatrix} 1+t \\ t+\sin t \\ 1+\sin t \end{pmatrix}$$

$$\gamma_3(t) = \begin{pmatrix} 1-t \\ \frac{\pi}{2} \\ 1 \end{pmatrix},\, t\in[0,1] \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma_3}(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\, F(\gamma_3(t)) = \begin{pmatrix} 1+\frac{\pi}{2}-t \\ 1+\frac{\pi}{2} \\ 2+t \end{pmatrix}$$

$$\gamma_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{\pi}{2}-t \\ \underbrace{\sin(\frac{\pi}{2}-t)}_{=\cos t} \end{pmatrix},\, t\in[0,\frac{\pi}{2}] \quad \Rightarrow \quad \dot{\gamma_4}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -\sin t \end{pmatrix},\, F(\gamma_4(t)) = \begin{pmatrix} \frac{\pi}{2}-t \\ \frac{\pi}{2}-t+\cos t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Nun können wir das Wegintegral berechnen und es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} F &= \int_0^1 F(\gamma_1(t))\dot{\gamma_1}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_2(t))\dot{\gamma_2}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 F(\gamma_3(t))\dot{\gamma_3}(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} F(\gamma_4(t))\dot{\gamma_4}(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (t + \sin t + \cos t + \cos t \sin t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 \left(t - 1 - \frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}t \\
&\quad + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(t - \frac{\pi}{2} - \cos t - \sin t \cos t\right)\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \left(2t - 1 - \frac{\pi}{2}\right)\,\mathrm{d}t + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(2t - \frac{\pi}{2} + \sin t\right)\,\mathrm{d}t = -\frac{\pi}{2} + 1.
\end{aligned}$$

- Mit dem Satz von Stokes:
  Berechne also das Oberflächenintegral $\int_G \operatorname{rot} F \cdot \vec{\eta}\,\mathrm{d}\sigma$:
  Zunächst ist

$$\operatorname{rot} F = \nabla \times F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \\ \frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Parametrisiere das Flächenstück $G = \Phi(K)$ mittels

$$\Phi(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \sin(\varphi) \end{pmatrix}, \quad (r, \varphi) \in K = [0, 1] \times [0, \frac{\pi}{2}].$$

Dann ist

$$\vec{\eta} = \frac{\partial \Phi}{\partial r} \times \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \cos \varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

und es folgt nach dem Satz von Stokes

$$\begin{aligned}
\int_{\partial G} F\,\mathrm{d}(x, y, z) &= \int_G \operatorname{rot} F \cdot \vec{\eta}\,\mathrm{d}\sigma = \int_K (\operatorname{rot} F)(\Phi(r, \varphi)) \cdot \vec{\eta}\,\mathrm{d}(r, \varphi) \\
&= \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -\cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix}\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi - 1\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}r = 1 - \frac{\pi}{2}.
\end{aligned}$$

$\square$

5. Aufgabe (9 Punkte)

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $(S, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : \Omega \to S$ eine messbare Abbildung.

a) Zeige, dass durch
$$\nu(A) := \mu(f^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{A}$$
ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert wird.

b) Seien $(\Omega, \overline{\Sigma}, \overline{\mu})$ und $(S, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\nu})$ die Vervollständigungen von (Ω, Σ, μ) und $(S, \mathcal{A}, \nu)$. Zeige, dass f auch $\overline{\Sigma}$-$\overline{\mathcal{A}}$-messbar ist.

Beweis.

a) ν ist wohldefiniert, da $f^{-1}(\mathcal{A}) \in \Sigma$ für alle $A \in \mathcal{A}$ aufgrund der Messbarkeit von f.
Da μ ein Maß ist, gilt $\nu(\emptyset) = \mu(f^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0$.
Ist nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ eine disjunkte Folge messbarer Mengen, so ist auch $(f^{-1}(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine disjunkte Folge messbarer Mengen, denn
$$f^{-1}(A_i) \cap f^{-1}(A_j) = f^{-1}(A_i \cap A_j) = f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \quad \forall\, i, j \in \mathbb{N}.$$
Dann gilt
$$\nu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mu\left(f^{-1}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} f^{-1}(A_n)\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(f^{-1}(A_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \nu(A_n).$$

b) Es ist also zu zeigen, dass
$$f^{-1}(A) \in \overline{\Sigma} \quad \forall A \in \overline{\mathcal{A}},$$
wobei
$$\begin{aligned} \overline{\mathcal{A}} &= \{B \cup N \mid B \in \mathcal{A},\, N \in \mathcal{N}_\nu\}, \quad \mathcal{N}_\nu = \{N \subseteq S \mid \exists\, M \in \mathcal{A} :\, \nu(M) = 0,\, N \subseteq M\} \\ \overline{\Sigma} &= \{D \cup O \mid D \in \Sigma,\, O \in \mathcal{N}_\mu\}, \quad \mathcal{N}_\mu = \{O \subseteq S \mid \exists\, P \in \Sigma :\, \mu(P) = 0,\, O \subseteq P\}, \end{aligned}$$
Sei also $A \in \overline{\mathcal{A}}$. Dann ist zunächst $f^{-1}(A) = f^{-1}(B \cup N) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(N)$.
Da $B \in \mathcal{A}$ und f nach Voraussetzung Σ-$\mathcal{A}$-messbar ist, gilt $f^{-1}(B) \in \Sigma$.
Es bleibt noch zu zeigen, dass $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_\mu$:
Da $N \in \mathcal{N}_\nu$, existiert ein $M \in \mathcal{A}$ mit $N \subseteq M$ und $\nu(M) = 0$. Dann ist aber auch $f^{-1}(N) \subseteq f^{-1}(M)$ und aus der Messbarkeit von f folgt $f^{-1}(M) \in \Sigma$ mit $\mu(f^{-1}(M)) = \nu(M) = 0$.
Also ist $f^{-1}(N) \in \mathcal{N}_\mu$ und folglich $f^{-1}(A) = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(N) \in \overline{\Sigma}$.

$\square$

6. Aufgabe (7 Punkte)

Sei (Ω, Σ, μ) ein vollständiger endlicher Maßraum und sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, die μ-fast überall gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert. Weiterhin gelte:

$$\exists\, M \in \mathbb{R}^+ : \quad |f_n(x) - f(x)| \le M \quad \forall\, x \in \Omega, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass f integrierbar ist und

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis.

Wir wollen den Satz von Lebesgue anwenden und weisen hierzu seine Voraussetzungen nach.

- Messbarkeit von f:
  Jeder endliche Maßraum ist insbesondere σ-endlich und somit impliziert die Vollständigekeit und μ-fast überall-Konvergenz der integrierbaren (also insbesondere messbaren) Funktionen f_n gegen f auch die Messbarkeit von f.

- Integrierbarkeit von f:
  Bemerke zunächst, dass M als konstante (elementare) Funktion integrierbar ist, da nach Voraussetzung $\int_\Omega M \,\mathrm{d}\mu = M\mu(\Omega) < \infty$. Da jedes f_n (und somit auch $|f_n|$) integrierbar ist und

  $$|f(x)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x)| \le \underbrace{M + |f_n(x)|}_{=:g_n(x)} \quad \forall\, x \in \Omega, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

  ist $g_n : \Omega \to \mathbb{R}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ eine integrierbare Majorante der messbaren Funktion f. Aus dem Satz von Lebesgue folgt somit sofort auch die Integrierbarkeit von f.

- Integrierbare Majorante von f_n:
  Wegen

  $$|f_n(x)| \le |f_n(x) - f(x)| + |f(x)| \le \underbrace{M + |f(x)|}_{=:g(x)} \quad \forall\, x \in \Omega, \forall\, n \in \mathbb{N},$$

  und der Integrierbarkeit von f (und somit auch von $|f|$) und M ist $g : \Omega \to \mathbb{R}$ eine integrierbare Majorante der Funktionenfolge f_n.

Also liefert der Satz von Lebesgue die gewünschte Aussage

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

□

(Gesamtpunktzahl: 44 Punkte)