Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski

Wintersemester 2008/09

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

Nachklausur zur VL Analysis III

07.04.2009

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Gebt bei allen Antworten eine Begründung bzw. einen Beweis an und verwendet für jede Aufgabe ein neues Blatt. Die Klausur ist mit 22 Punkten bestanden. Ihr habt 120 Minuten Zeit.

Viel Erfolg!

Hiermit erkläre ich mich mit der Veröffentlichung meines Klausurergebnisses mit Matrikelnummer auf der Homepage der Veranstaltung einverstanden.

Berlin, den 07.04.2009 .... (Unterschrift)

1	2	3	4	5	6	$\sum$

1. Aufgabe (6 Punkte)

Zeige mit Hilfe des Satzes von Picard-Lindelöf, dass das Anfangswertproblem

$$y' = y \cos x, \quad y(0) = 1$$

genau eine Lösung auf dem Intervall $[-1/2, 1/2]$ besitzt und bestimme diese mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen.

2. Aufgabe (7 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \frac{1}{\|(x,y)\|^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}.$$

a) Zeige, dass F zwar die Integrabilitätsbedingung erfüllt, aber kein Gradientenfeld ist.

b) Bestimme ein Gebiet $G \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, so dass

$$\int_\gamma F \, \mathrm{d}(x,y) = 0 \quad \text{für alle geschlossenen Wege } \gamma \text{ mit } \Gamma_\gamma \subseteq G$$

und begründe die Wahl von G.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Berechne das Volumen des Körpers

$$R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2,\, x^2 + y^2 \geq r^2\} \quad (0 < r < R).$$

4. Aufgabe (9 Punkte)

Berechne das Wegintegral $\int_{\partial G} F \,\mathrm{d}(x, y, z)$ für das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x + y \\ y + z \\ x + z \end{pmatrix}$$

und das Flächenstück

$$G = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2},\, z = \sin y\right\}.$$

5. Aufgabe (9 Punkte)

Sei (Ω, Σ, μ) ein Maßraum, $(S, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $f : \Omega \to S$ eine messbare Abbildung.

a) Zeige, dass durch

$$\nu(A) := \mu(f^{-1}(A)), \quad A \in \mathcal{A}$$

ein Maß auf $\mathcal{A}$ definiert wird.

b) Seien $(\Omega, \overline{\Sigma}, \overline{\mu})$ und $(S, \overline{\mathcal{A}}, \overline{\nu})$ die Vervollständigungen von (Ω, Σ, μ) und $(S, \mathcal{A}, \nu)$. Zeige, dass f auch $\overline{\Sigma}$-$\overline{\mathcal{A}}$-messbar ist.

6. Aufgabe (7 Punkte)

Sei (Ω, Σ, μ) ein vollständiger endlicher Maßraum und sei $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von integrierbaren Funktionen $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$, die μ-fast überall gegen eine Funktion $f : \Omega \to \mathbb{R}$ konvergiert. Weiterhin gelte:

$$\exists\, M \in \mathbb{R}^+ : \quad |f_n(x) - f(x)| \leq M \quad \forall\, x \in \Omega,\, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass f integrierbar ist und

$$\lim_{n \to \infty} \int_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu.$$

(Gesamtpunktzahl: 44 Punkte)