Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

Wintersemester 2008/09

1. Übungsblatt zur VL Analysis III

Wiederholung:
lokale Extrema mit Nebenbedingungen, Differentialgleichungen
Abgabe: 23.10.2008 **vor Beginn** der Übung

Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter

- Die Hausaufgaben werden in festen Zweier-Gruppen bearbeitet und sind jede Woche *vor Beginn* der Übung abzugeben. Einzelabgaben oder spätere Abgaben sind nicht möglich.
- Auf jede Abgabe gehört:
  - Nummer des laufenden Übungsblattes, Datum
  - Eure vollständigen Namen und Matrikelnummern
  - Name des Tutors/der Tutorin und Tutoriumstermin
- Schreibt sauber und achtet auf mathematisch korrekte Formulierungen der Beweise.

Übung

1. Aufgabe
Sei $\overline{B_2(0)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4\}$. Bestimme die lokalen und globalen Extrema des Abstandes der Punkte in $\overline{B_2(0)}$ vom Punkt $(1,0)$.

2. Aufgabe (Picard-Lindelöfsches Iterationsverfahren)
Seien a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $\eta \in \mathbb{R}^n$, $t_0 \in]a,b[$ und $f : [a,b] \times \overline{B_r(\eta)} \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung, die bzgl. der 2. Variablen Lipschitz-stetig sei, d.h.

$$\exists\, L > 0 \quad \|f(t,y) - f(t,\hat{y})\|_{\mathbb{R}^n} \leq L\|y - \hat{y}\|_{\mathbb{R}^n} \quad \forall\, t \in [a,b], \forall\, y, \hat{y} \in \overline{B_r(\eta)}.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf existiert nun ein $\alpha > 0$, so dass das Anfangswertproblem

$$(*) \qquad \begin{cases} y' = f(x,y) \\ y(\xi) = \eta \end{cases}$$

auf $\mathcal{I} = [\xi - \alpha, \xi + \alpha]$ eine eindeutige Lösung u besitzt.
Betrachte nun die rekursive Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $u_n : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$u_{n+1} := \eta + \int_\xi^x f(t, u_n(t))\,\mathrm{d}t, \quad u_0 = y(\xi).$$

a) Zeige, dass die Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wohldefiniert ist.
b) Zeige weiterhin, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im Banachraum $(C(\mathcal{I}), \|\cdot\|_\infty)$ bildet.

c) Folgere daraus die gleichmäßige Konvergenz von $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen die eindeutige Lösung $u : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems $(*)$.

d) Bestimme mit Hilfe des obigen Iterationsverfahrens eine Lösung des Anfangswertproblems

$$y' = y, \quad y(0) = 1.$$

3. Aufgabe

Löse das Anfangswertproblem

$$y' = \frac{y}{x}, \quad y(2) = 1, \quad x \neq 0$$

mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 0\}$. Bestimme die lokalen und globalen Extrema von $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin x + y(y + 1)$.

2. Aufgabe (8 Punkte)

Finde auf dem Schnitt des Zylinders $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ und der Ebene $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z\}$ die Punkte minimalen und maximalen Abstandes zum Nullpunkt.

3. Aufgabe (15 Punkte)

a) Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$y' = \sqrt{x|y|}, \quad y(1) = 0$$

mit $x \geq 0$. Bestimme durch Anwendung des Satzes von Peano auf das Rechteck $J \times D = [0, 2] \times [-2, 2]$ ein Intervall, auf dem eine Lösung des Anfangswertproblems existiert.

b) Zeige, dass das Anfangswertproblem

$$y' = ye^{x^2-25} \sin(x^3 + 2), \quad y(2) = 1$$

genau eine Lösung auf dem Intervall $[-1, 5]$ besitzt.

c) Bestimme die Lösung des AWP

$$y' = 2xy, \quad y(0) = c \quad (c \in \mathbb{R})$$

mit Hilfe des Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahrens.

4. Aufgabe (9 Punkte)

Bestimme die Lösung der folgenden Anfangswertprobleme mit Hilfe der Methode der Separation der Variablen:

a) $\begin{cases} y' = \frac{y}{x}, \\ y(2) = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} y' = -(x+1)y, \\ y(1) = \frac{1}{2} \end{cases}$ c) $\begin{cases} y' = \frac{1}{y}, \\ y(1) = 1. \end{cases}$

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)

Tutoriumsaufgaben

1. Aufgabe
Sei $D \subseteq \mathbb{R}^2$ offen und $f : D \to \mathbb{R}$ stetig partiell differenzierbar nach der 2. Variablen. Zeige, dass dann f lokal Lipschitz-stetig bzgl. der 2. Variablen ist.
Hinweis: Mittelwertsatz, DGL1-Skript Wittbold Kap2, S.31

2. Aufgabe
Bestimme die kleinste Zahl $A \in \mathbb{R}$, so dass beliebige zwei Quadrate mit der Gesamtfläche 1 disjunkt (bis auf Überlappung am Rand) in ein Rechteck mit Flächeninhalt A gelegt werden können.

3. Aufgabe
Bestimme lokale und globale Extrema der Höhenfunktion $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$ auf dem Torus $T^2 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{2})^2 + y^2 = 1\}$.
Skizziere die Höhenlinien von h auf T^2.

4. Aufgabe
Sei $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{2} + y^2 \leq 3\}$ und sei $f : D \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x + 2y + 3$.
Untersuche f auf globale Extrema.

5. Aufgabe
Finde die lokalen und globalen Extrema von $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2y$ unter der Nebenbedingung $y^2 - x^2 = 1$.