Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Wintersemester 2008/09
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

2. Übungsblatt zur VL Analysis III

Rektifizierbarkeit, Funktionen beschränkter Variation
Abgabe: 30.10.2008 **vor Beginn** der Übung

Übung

1. Aufgabe
Sei $[a, b]$ ein Intervall und $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Beweise die folgenden Aussagen:

a) f ist genau dann konstant, wenn $f \in \mathrm{BV}([a, b])$ und $V_a^b(f) = 0$.

b) Ist $f \in \mathrm{BV}([a, b])$, so ist f beschränkt und es gilt $|f(a) - f(b)| \le V_a^b(f)$.

c) Ist f monoton, so gilt $V_a^b(f) = |f(b) - f(a)|$. Also ist insbesondere $f \in \mathrm{BV}([a, b])$.

d) Ist f Lipschitz-stetig mit Lipschitzkonstante L, so gilt $V_a^b(f) \le L(b - a)$. Also ist insbesondere $f \in \mathrm{BV}([a, b])$.

e) Ist $f \in \mathrm{BV}([a, b])$, so gilt $f \in \mathrm{BV}([c, d])$ für jedes Teilintervall $[c, d] \subseteq [a, b]$.

f) Sei $a < c < b$. Dann ist $f \in \mathrm{BV}([a, b])$ genau dann, wenn $f \in \mathrm{BV}([a, c])$ und $f \in \mathrm{BV}([c, b])$. In diesem Fall gilt $V_a^b(f) = V_a^c(f) + V_c^b(f)$.

g) Ist $f \in \mathrm{BV}([a, b])$ stetig in x_0, so ist auch die Funktion $V : [a, b] \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$V(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = a, \\ V_a^x(f) & \text{für } x \in]a, b] \end{cases}$$

stetig in x_0.

h) (Jordanscher Darstellungssatz)
Es ist $f \in \mathrm{BV}([a, b])$ genau dann, wenn monoton wachsende Funktionen $f_1,\ f_2 : [a, b] \to \mathbb{R}$ existieren mit $f = f_1 - f_2$. Ist f stetig, so können auch f_1 und f_2 stetig gewählt werden.

i) Ist f stetig und $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ gegeben durch $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, so ist $F \in \mathrm{BV}([a, b])$ und es gilt $V_a^b(F) = \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$.

2. Aufgabe
Zeige, dass glatte Bögen auch durch nicht-glatte Wege dargestellt werden können.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (12 Punkte)

Sei $[a,b]$ ein Intervall und $f,\, g : [a,b] \to \mathbb{R}$. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Ist f eine Treppenfunktion, so gilt $f \in \mathrm{BV}([a,b])$.

b) Ist $f \in \mathrm{BV}([a,b])$, so gilt $\|f\|_\infty \leq |f(a)| + V_a^b(f)$.

c) Sind $f,\, g \in \mathrm{BV}([a,b])$ und $\lambda,\, \mu \in \mathbb{R}$, so gelten die beiden Ungleichungen

   (i) $V_a^b(\lambda f + \mu g) \leq |\lambda| V_a^b(f) + |\mu| V_a^b(g)$

   (ii) $V_a^b(fg) \leq \|f\|_\infty V_a^b(g) + \|g\|_\infty V_a^b(f)$

d) Der Raum $\mathrm{BV}([a,b])$ ist ein Banachraum, wenn er mit einer der beiden folgenden Normen versehen wird:

   (i) $\|f\| := |f(a)| + V_a^b(f)$,

   (ii) $\|f\|^* := \|f\|_\infty + V_a^b(f)$.

   Zeige weiterhin, dass diese Normen äquivalent sind.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $[a,b]$ ein Intervall und $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein Weg. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Ist γ in $[a,b]$ stetig differenzierbar mit $|\gamma'(t)| \leq \alpha$ für alle $t \in [a,b]$, so gilt für die Weglänge $L(\gamma) \leq \alpha(b-a)$.

b) Ist $a < c < b$ und $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2$, wobei $\gamma_1 = \gamma|_{[a,c]}$ und $\gamma_2 = \gamma|_{[c,b]}$, so gilt: γ ist genau dann rektifizierbar, wenn γ_1 und γ_2 rektifizierbar sind und $L(\gamma) = L(\gamma_1) + L(\gamma_2)$ gilt.

3. Aufgabe (9 Punkte)

Skizziere den Graphen der Funktion $g : [0,1] \to \mathbb{R}$, gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ x \cos\left(\frac{\pi}{x}\right) & \text{für } x \in\,]0,1] \end{cases}$$

und zeige, dass g stetig ist, aber $g \notin \mathrm{BV}([0,1])$. (D.h. g ist ein nicht-rektifizierbarer Weg)

Hinweis: Betrachte die Folge von Zerlegungen $Z_n = \left\{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \ldots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\right\}$ von $[0,1]$.

4. Aufgabe (9 Punkte)

Zeige, dass die Funktion

$$\Phi : [0,1] \to \mathbb{R}^2, \quad \Phi(t) = \begin{cases} (0,0) & \text{für } t = 0, \\ (t, t^\alpha \sin\left(\frac{1}{t}\right)) & \text{für } t \in\,]0,1] \end{cases}$$

für alle $\alpha > 0$ ein Jordanweg ist. Für welche $\alpha > 0$ ist Φ rektifizierbar?

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)