Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Wintersemester 2008/09
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

3. Übungsblatt zur VL Analysis III

Riemann-Stieltjes-Integral, Wegintegrale
Abgabe: 06.11.2008 **vor Beginn** der Übung

Lösungsskizze

1. Aufgabe (16 Punkte)

b) Sei $f \in C([a,b])$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{BV}([a,b]) \cap C([a,b])$ eine Funktionenfolge, die punktweise gegen $g \in C([a,b])$ konvergiert. Ist die Folge der Totalvariationen $(V_a^b(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f \, \mathrm{d}g_n = \int_a^b f \, \mathrm{d}g.$$

Beweis:
Zeige zunächst, dass $v(Z, g_n) \xrightarrow{n\to\infty} v(Z,g)$ für jede Zerlegung Z von $[a,b]$ gilt.
Sei also $Z = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\}$ eine beliebige Zerlegung und sei $\varepsilon > 0$. Da g_n punktweise gegen g konvergiert, existieren N_i, $N_{i-1} \in \mathbb{N}$, so dass

$$\begin{aligned} |g_n(t_i) - g(t_i)| &< \frac{\varepsilon}{2m} \quad \forall n \geq N_i \\ |g(t_{i-1}) - g_n(t_{i-1})| &< \frac{\varepsilon}{2m} \quad \forall n \geq N_{i-1}. \end{aligned}$$

Wähle nun $N = \max_{i=0,\dots m} N_i \in \mathbb{N}$. Dann gilt unter Verwendung der umgekehrten Dreiecksungleichung für alle $n \geq N$:

$$\begin{aligned} |v(Z,g_n) - v(Z,g)| &= \left| \sum_{i=1}^m |g_n(t_i) - g_n(t_{i-1})| - |g(t_i) - g(t_{i-1})| \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m |g_n(t_i) - g(t_i)| + |g(t_{i-1}) - g_n(t_{i-1})| \\ &< \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{2m} + \frac{\varepsilon}{2m} = \sum_{i=1}^m \frac{\varepsilon}{m} = m\frac{\varepsilon}{m} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Da nun nach Voraussetzung die Folge der Totalvariationen $(V_a^b(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist, existiert ein $C > 0$ (welches nicht von $n \in \mathbb{N}$ abhängt!), so dass $v(Z, g_n) < C$ für jede Zerlegung Z. Folglich ist auch

$$v(Z,g) = \lim_{n\to\infty} v(Z,g_n) < C \quad \text{für jede Zerlegung } Z.$$

Somit ist auch $g \in \mathrm{BV}([a,b])$ und nach VL existiert daher das Riemann-Stieltjes-Integral

$$\int_a^b f \, \mathrm{d}g = \lim_{|Z|\to 0} \mathrm{RS}_g(Z, \xi, f).$$

Da nach Voraussetzung $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{BV}([a,b])$ auch $\int_a^b f \,\mathrm{d}g_n = \lim_{|Z|\to 0} \mathrm{RS}_{g_n}(Z,\xi,f)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert, gilt für jedes $\varepsilon > 0$:

$$\begin{aligned}
\exists\, \hat{\delta}_n > 0: \quad |Z| < \hat{\delta}_n \quad &\Longrightarrow \quad \left|\int_a^b f \,\mathrm{d}g_n - \mathrm{RS}_{g_n}(Z,\xi,f)\right| < \frac{\varepsilon}{3} \\
\exists\, \widetilde{\delta}_n > 0: \quad |Z| < \widetilde{\delta}_n \quad &\Longrightarrow \quad \left|\int_a^b f \,\mathrm{d}g - \mathrm{RS}_{g}(Z,\xi,f)\right| < \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

Weiterhin wissen wir, dass f als stetige Funktion auf dem kompakten Intervall $[a,b]$ ihr Maximum annimmt. Setze also $M := \max_{x\in[a,b]} |f(x)|$, wobei wir o.B.d.A annehmen können, dass $M > 0$. Sei nun $\varepsilon > 0$.
Wähle zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine Zerlegung $Z = \{a = t_0 < t_1 < \cdots < t_m = b\}$ mit $|Z| < \delta_n := \min\{\hat{\delta}_n, \widetilde{\delta}_n\}$. Wegen $v(Z,g_n) \xrightarrow{n\to\infty} v(Z,g)$, kann nun ein $N \in \mathbb{N}$ gewählt werden, so dass

$$|v(Z,g_n) - v(Z,g)| < \frac{\varepsilon}{3M} \quad \forall n \geq N.$$

Dann gilt für alle $n \geq N$:

$$\begin{aligned}
&\left|\int_a^b f \,\mathrm{d}g - \int_a^b f \,\mathrm{d}g_n\right| \\
&\leq \left|\int_a^b f \,\mathrm{d}g - \mathrm{RS}_g(Z,\xi,f)\right| + |\mathrm{RS}_g(Z,\xi,f) - \mathrm{RS}_{g_n}(Z,\xi,f)| + \left|\mathrm{RS}_{g_n}(Z,\xi,f) - \int_a^b f \,\mathrm{d}g_n\right| \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \left|\sum_{i=1}^m f(\xi_i)\Big((g(t_i) - g(t_{i-1})) - (g_n(t_i) - g_n(t_{i-1}))\Big)\right| + \frac{\varepsilon}{3} \\
&\leq \frac{2\varepsilon}{3} + \max_{x\in[a,b]} |f(x)| \left|\sum_{i=1}^m |g(t_i) - g(t_{i-1})| - |g_n(t_i) - g_n(t_{i-1})|\right| \\
&= \frac{2\varepsilon}{3} + M|v(Z,g) - v(Z,g_n)| < \frac{2\varepsilon}{3} + M\frac{\varepsilon}{3M} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Folglich erhalten wir die gewünschte Aussage $\lim_{n\to\infty} \int_a^b f \,\mathrm{d}g_n = \int_a^b f \,\mathrm{d}g$. $\square$