Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Wintersemester 2008/09
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

3. Übungsblatt zur VL Analysis III

Riemann-Stieltjes-Integral, Wegintegrale
Abgabe: 06.11.2008 **vor Beginn** der Übung

Übung

1. Aufgabe
Beweise die folgenden Eigenschaften für Riemann-Stieltjes-Integrale:

a) (Fundamentalungleichung für RS-Integrale)
Ist $f \in C([a,b])$ und $\alpha \in \mathrm{BV}([a,b])$, so gilt

$$\left| \int_a^b f \,\mathrm{d}\alpha \right| \leq \max_{x\in[a,b]} |f(x)|\, V_a^b(\alpha).$$

b) (Partielle Integration für RS-Integralen)
Ist $f \in C([a,b])$ RS-integrierbar bzgl. $g \in C([a,b])$, so ist auch g bzgl. f auf $[a,b]$ RS-integrierbar ist und es gilt

$$\int_a^b f \,\mathrm{d}g + \int_a^b g \,\mathrm{d}f = fg\Big|_a^b = f(b)g(b) - f(a)g(a).$$

2. Aufgabe
Beweise den folgenden Satz aus der Vorlesung:
Satz 9.2.5: Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar, $f : \Gamma_\gamma \to \mathbb{R}^n$ stetig, $\varphi : [c,d] \to [a,b]$ stetig differenzierbar und surjektiv mit $\varphi(c) = a$, $\varphi(d) = b$. Dann gilt

$$\int_\gamma f \,\mathrm{d}x = \int_{\gamma\circ\varphi} f \,\mathrm{d}x.$$

3. Aufgabe
Bestimme die Wegintegrale der Funktionen

$$f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = (y, x-y), \quad g(x,y) = (y, y-x)$$

über die Wege

a) $\gamma_1 = \gamma_1^1 \oplus \gamma_1^2$, wobei $\gamma_1^1, \gamma_1^2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_1^1(t) = (t,0)$ und $\gamma_1^2(t) = (1,t)$.

b) $\gamma_2 = \gamma_2^1 \oplus \gamma_2^2$, wobei $\gamma_2^1, \gamma_2^2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_2^1(t) = (0,t)$ und $\gamma_2^2(t) = (t,1)$.

c) $\gamma_3 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ mit $\gamma_3(t) = (t, t^2)$.

Was ist festzustellen?

Hausaufgaben

1. Aufgabe (16 Punkte)

Beweise die beiden folgenden Konvergenzsätze für Riemann-Stieltjes-Integrale:

a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C([a,b])$ eine Funktionenfolge, welche gleichmäßig gegen f konvergiert. Ist $g \in \mathrm{BV}([a,b]) \cap C([a,b])$, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n \, \mathrm{d}g = \int_a^b f \, \mathrm{d}g.$$

b) Sei $f \in C([a,b])$ und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{BV}([a,b]) \cap C([a,b])$ eine Funktionenfolge, die punktweise gegen $g \in C([a,b])$ konvergiert. Ist die Folge der Totalvariationen $(V_a^b(g_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f \, \mathrm{d}g_n = \int_a^b f \, \mathrm{d}g.$$

2. Aufgabe (12 Punkte)

Sei $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ ein rektifizierbarer Weg und $f : \Gamma_\gamma \to \mathbb{R}^n$ stetig. Ist $\omega : [c,d] \to [a,b]$ eine stetige, streng monoton fallende Abbildung, so gilt:

$$\int_{\gamma\circ\omega} f \, \mathrm{d}x = -\int_\gamma f \, \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Heuser, Lehrbuch der Analysis Teil 2, Satz 180.5

3. Aufgabe (8 Punkte)

Berechne die Wegintegrale von f über γ oder längs des angegebenen Jordanbogens.

a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (y,x)$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (t,t^2)$.

b) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (e^x, e^y)$ und $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\sqrt{t}, t)$.

c) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (2xy - x^2, x + y^2)$ und $\gamma = \gamma_1 \oplus \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ sei der Weg von $(0,0)$ nach $(1,0)$, der sich aus dem Weg $\gamma_1(t) = (t^2, t)$ und dem Geradenstück γ_2 von $(1,1)$ nach $(1,0)$ zusammensetzt.

d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x+y, x-y)$ längs der von links nach rechts orientierten Parabel $y = x^2$ zwischen den Punkten $(-1,1)$ und $(1,1)$.

e) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$ längs des Dreiecks mit den Eckpunkten $(0,0)$, $(0,1)$, $(1,0)$ bei einem vollen Umlauf im positiven Sinn.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x,y) = (x^2, xy)$. Bestimme Wege $\gamma_1, \gamma_2 : [0,1] \to \mathbb{R}^2$, so dass

$$\int_{\gamma_1} F \, \mathrm{d}(x,y) \neq \int_{\gamma_2} F \, \mathrm{d}(x,y) \quad \text{(d.h. das Wegintegral von } F \text{ ist wegabhängig.).}$$

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)