Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski Wintersemester 2008/09
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

4. Übungsblatt zur VL Analysis III

Wegunabhängigkeit, Gradientenfelder
Abgabe: 13.11.2008 **vor Beginn** der Übung

Lösungshinweise

1. Aufgabe

a) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Jeder Weg $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\Gamma_\gamma \subseteq G$ ist stetig deformierbar in einen Streckenzug von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$.

Der Streckenzug (Polygonzug) von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$ soll natürlich selbst auch wieder in dem Gebiet G liegen!
Konstruiere einen geeigneten Streckenzug mit Hilfe von Kompaktheitsargumenten. Die folgende Aussage darf ohne Beweis verwendet werden:

Proposition 1. *Seien γ_0, $\gamma_1 : [a,b] \to G$ Wege mit $\gamma_0(a) = \gamma_1(a)$ und $\gamma_0(b) = \gamma_1(b)$. Gilt für die Verbindungsstrecke $|[\gamma_0(t), \gamma_1(t)]| \subseteq G$ für alle $t \in [a,b]$, so ist γ_0 stetig deformierbar in γ_1 mittels der Abbildung $H : [0,1] \times [a,b] \to G$, $H(s,t) = s\gamma_1(t) + (1-s)\gamma_0(t)$.*

b) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist für alle $n \geq 3$ einfach zusammenhängend.

Verwende Teil a).
Die folgende Aussage darf ohne Beweis verwendet werden:

Proposition 2. *Für jeden Streckenzug φ mit $\Gamma_\varphi \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ existiert ein Vektor $c = c(\varphi) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, so dass $\Gamma_\varphi \subseteq \mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}_+ \cdot c = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \nexists\, \lambda > 0 : x = \lambda \cdot c\}$.*

c) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ ist für alle $n \geq 2$ einfach zusammenhängend.

Verwende Teil b).

3. Aufgabe

b) Sei Γ ein Jordanbogen und $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$ zwei Jordandarstellungen desselben. Zeige, dass für jede stetige Funktion $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{\gamma_1} f \,\mathrm{d}s = \int_{\gamma_2} f \,\mathrm{d}s.$$

Die Jordanwege γ_1, γ_2 sollen natürlich rektifizierbar sein. Die Integrale bzgl. der Weglänge sind gegeben durch die Riemann-Stieltjes-Integrale

$$\int_{\gamma_1} f \,\mathrm{d}s = \int_{a_1}^{b_1} f(\gamma_1(t)) \,\mathrm{d}s(t), \quad \int_{\gamma_2} f \,\mathrm{d}s = \int_{a_2}^{b_2} f(\gamma_2(t)) \,\mathrm{d}s(t).$$

Tipp: Überlegt euch, was Ihr über zwei Jordandarstellungen desselben Jordanbogens wisst. Wie wirkt sich das auf die entsprechenden Weglängenfunktionen s und Zerlegungen der Intervalle $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$ aus?