Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Wintersemester 2008/09
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

4. Übungsblatt zur VL Analysis III

Wegunabhängigkeit, Gradientenfelder

Abgabe: 13.11.2008 **vor Beginn** der Übung

Übung

1. Aufgabe
Zeige, dass jedes sternförmige Gebiet einfach zusammenhängend ist.

2. Aufgabe
Gegeben sei das Vektorfeld

$$F : G \to \mathbb{R}^2, \quad F(x,y) = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass F für $G = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ zwar der Integrabilitätsbedingung genügt, aber kein Gradientenfeld ist. Bestimme ein $G \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, so dass F eine Stammfunktion besitzt.

3. Aufgabe
Zeige, dass konservative Kraftfelder im $\mathbb{R}^3$ stets wirbelfrei sind. Gilt auch die Umkehrung dieser Aussage?

4. Aufgabe
Gegeben sei das Kraftfeld

$$F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+z \\ -y-z \\ x-y \end{pmatrix}.$$

Überprüfe, ob F konservativ ist und bestimme gegebenenfalls ein Potential.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (18 Punkte)
Beweise die folgenden Aussagen:

a) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ ein Gebiet. Jeder Weg $\gamma : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ mit $\Gamma_\gamma \subseteq G$ ist stetig deformierbar in einen Streckenzug von $\gamma(a)$ nach $\gamma(b)$.

b) $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ist für alle $n \geq 3$ einfach zusammenhängend.

c) $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ ist für alle $n \geq 2$ einfach zusammenhängend.

d) Sind $G_\alpha \subseteq \mathbb{R}^n$ sternförmige Gebiete bzgl. x_0, so ist auch $G = \bigcup G_\alpha$ ein sternförmiges Gebiet bzgl. x_0. Ist $H = \bigcap G_\alpha$ offen, so ist auch H ein sternförmiges Gebiet bzgl. x_0.

2. Aufgabe (6 Punkte)
Gegeben sei das Vektorfeld $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (3x + 2y, 2x)$.

a) Berechne das Wegintegral von F längs des Weges $\gamma : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (\cos t, 2 \sin t)$.

b) Zeige, dass F ein Gradientenfeld ist und bestimme ein Potential von F.

c) Berechne unter Verwendung von b) das Wegintegral von F längs eines Weges, der die Punkte $p_1 = (1, 0)$ und $p_2 = (0, 2)$ verbindet.

3. Aufgabe (10 Punkte)

a) Bestimme das Integral von $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x) = \|x\|_2$ bzgl. der Weglänge des Weges $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$.

b) Sei Γ ein Jordanbogen und $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{R}^n$,$\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{R}^n$ zwei Jordandarstellungen desselben. Zeige, dass für jede stetige Funktion $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ gilt:

$$\int_{\gamma_1} f \, \mathrm{d}s = \int_{\gamma_2} f \, \mathrm{d}s.$$

4. Aufgabe (6 Punkte)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine beliebige differenzierbare Funktion. Dann heißt das Vektorfeld $v : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $v(x) = \frac{x}{\|x\|} f(\|x\|)$ ein *Zentralfeld.*

a) Zeige, dass das Zentralfeld konservativ ist.

b) Für welche Funktionen f ist das Zentralfeld auch quellenfrei, d.h. $\operatorname{div} v = 0$?

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)