Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

Wintersemester 2008/09

5. Übungsblatt zur VL Analysis III

Riemannfolgen im $\mathbb{R}^n$, Nullmengen

Abgabe: 20.11.2008 **vor Beginn** der Übung

Übung

1. Aufgabe
Zeige, dass die folgenden Mengen Nullmengen sind:

a) Die Hyperebene $x_j = c$, d.h. also die Menge

$$H := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_j = c\}$$

für festes $j \in \{1, \dots, n\}$ und $c \in \mathbb{R}$.

b) $\mathbb{R} \times \{0\}$

2. Aufgabe
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ kompakt. Ist A eine Nullmenge, dann ist A auch eine Jordan-Nullmenge. Zeige, dass diese Aussage für nicht-kompakte A im Allgemeinen nicht gilt.

3. Aufgabe
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader und $f : A \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion mit $f \in \mathcal{R}(A)$, $f(A) \subseteq [a, b]$. Zeige, dass für $h \in \mathcal{R}([a, b])$ im Allgemeinen $h \circ f \notin \mathcal{R}(A)$.
Betrachte hierzu die Abbildung

$$f : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \cap [0,1] \\ \frac{1}{p} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in [0,1] \text{ in gekürzter Form} \end{cases}$$

und zeige, dass die Unstetigkeitsstellen von f gegeben sind durch $\mathbb{Q} \cap [0, 1]$.

4. Aufgabe (Cantorsches Diskontiunuum)
Zeige, dass Nullmengen mit überabzählbar vielen Punkten existieren.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (10 Punkte)
Beweise die folgenden Aussagen:

a) Sind $A_1, \ldots, A_n \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-Nullmengen, so ist auch $A = \bigcup_{i=1}^n A_i$ eine Jordan-Nullmenge.

b) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge, so ist auch $A + x_0 := \{x + x_0 \mid x \in A\}$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge.

c) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und besitzt nur endlich viele Häufungspunkte, so ist A eine Jordan-Nullmenge.

2. Aufgabe (10 Punkte)
Beweise die folgenden Aussagen:

a) Sei $A_i \subseteq \mathbb{R}^n$ für jedes $i \in \mathcal{I}$ eine Nullmenge. Dann ist $A = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$ im Allgemeinen keine Nullmenge.

b) Sind $A_1 \subseteq \mathbb{R}^p$, $A_2 \subseteq \mathbb{R}^q$ Nullmengen, so ist auch $A_1 \times A_2 \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$ eine Nullmenge.

c) Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Ist $A \subseteq U$ eine Nullmenge, so ist auch $f(A)$ eine Nullmenge.

3. Aufgabe (8 Punkte)
Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader mit Maß 0 und $f : A \to \mathbb{R}$ beschränkt. Zeige unter Verwendung von Riemannfolgen, dass dann $f \in \mathcal{R}(A)$ mit $\int_A f \, \mathrm{d}x = 0$.

4. Aufgabe (12 Punkte)

a) Sei $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader und $f : A \to \mathbb{R}$ stetig. Zeige, dass

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid x \in A,\, y = f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

eine Nullmenge ist.

b) Folgere aus a), dass der Rand der n-dimensionalen Kugel

$$K_n(r) := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}$$

eine Nullmenge ist.

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)