Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Wintersemester 2008/09
`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/`

6. Übungsblatt zur VL Analysis III

Satz von Fubini, Jordan-Messbarkeit

Abgabe: 27.11.2008 **vor Beginn** der Übung

Übung

1. Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \text{ oder} \\ & \quad (x \in \mathbb{Q} \cap [0,1] \ \underline{\text{und}}\ y \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]), \\ 1 - \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \in [0,1] \text{ in gekürzter Form und } y \in \mathbb{Q} \cap [0,1]. \end{cases}$$

Zeige, dass die iterierten Ober- und Unterintegrale von f existieren und übereinstimmen, obwohl die Funktion $g_x : [0,1] \to \mathbb{R}$, $g_x(y) = f(x,y)$ für kein $x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]$ Riemann-integrierbar ist.

2. Aufgabe

Zeige, dass es sich bei den folgenden Mengen um Jordan-Nullmengen handelt:

a) Der Graph von $f \in \mathcal{R}(B)$ über eine Jordan-messbare Menge $B \subseteq \mathbb{R}^n$:

$$\operatorname{graph}(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in B\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

b) Der Bogen $\Gamma_\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ eines rektifizierbaren Weges $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ für $n \geq 2$.
(Somit ist $B \subseteq \mathbb{R}^2$ gewiss dann messbar, wenn B beschränkt ist und sein Rand der Bogen eines rektifizierbaren Weges ist.)

3. Aufgabe

Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g : G \to \mathbb{R}^p$ ($p \geq n$) stetig differenzierbar. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Ist $N \subseteq G$ eine kompakte Jordan-Nullmenge, so ist auch $g(N) \subseteq \mathbb{R}^p$ eine Jordan-Nullmenge.

b) Sei $p = n$ und g injektiv mit $\det Dg(x) \neq 0 \ \forall\, x \in G$. Ist $B \subseteq G$ kompakt und Jordan-messbar, so ist auch $g(B)$ Jordan-messbar und es gilt $\partial g(B) = g(\partial B)$.

4. Aufgabe

Bestimme das Volumen der n-dimensionalen Kugel vom Radius $r > 0$

$$K_n(r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leq r\}.$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (12 Punkte)
Gegeben sei die Funktion

$$f : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{für } y \in \mathbb{Q} \cap [0,1], \\ 2x & \text{für } y \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1]. \end{cases}$$

Zeige, dass zwar

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x = 1 \quad \text{für alle } y \in [0,1] \quad \text{und} \quad \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x \right) \mathrm{d}y = 1,$$

jedoch $f \notin \mathcal{R}([0,1] \times [0,1])$. Zeige hierzu, dass f genau in den Punkten $(\frac{1}{2}, y)$, $y \in [0,1]$ stetig ist. *(Somit wurde gezeigt, dass die Umkehrung des Satzes von Fubini im Allgemeinen nicht gilt!)*

2. Aufgabe (14 Punkte)

a) Berechne die folgenden Integrale:

$$\int_{[0,1]\times[0,1]} xy + y^2 \,\mathrm{d}(x,y), \quad \int_{[1,2]\times[1,2]} e^{x+y} \,\mathrm{d}(x,y).$$

b) Berechne mit Hilfe des Satzes von Cavalieri das Volumen des Durchschnitts B der beiden Kreiszylinder Z_1, Z_2 im $\mathbb{R}^3$:

$$Z_1 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + z^2 \le r^2\}, \quad Z_2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y^2 + z^2 \le r^2\} \quad (r > 0).$$

c) Bestimme mit Hilfe des Satzes von Cavalieri das Volumen der Menge

$$M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \in [0, 2\pi], \, (x - \cos z)^2 + (y - \sin z)^2 \le \frac{1}{4}\}.$$

d) Seien $f, g : [0,1] \times [0,\pi] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) = xy \sin(x^2 - y^2), \quad g(x,y) = e^{x+y}.$$

Bestimme das Volumen von $M(f,g)$.

3. Aufgabe (14 Punkte)
Beweise die folgende Aussagen:

a) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ Jordan-messbar. Dann ist auch jede Menge $A \subseteq \mathbb{R}^n$ mit $\mathring{B} \subseteq A \subseteq \overline{B}$ Jordan-messbar und es gilt $v(A) = v(B)$.
Hinweis: Zeige zunächst, dass $\underline{v}(B) = \underline{v}(\mathring{B})$ *und* $\overline{v}(B) = \overline{v}(\overline{B})$.

b) Sei $B \subseteq \mathbb{R}^n$ beschränkt und enthalten in einer Hyperebene des $\mathbb{R}^n$. Dann ist B Jordan-messbar mit $v(B) = 0$.

c) Sei $G \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $g : G \to \mathbb{R}^p$ $(p \ge n)$ stetig differenzierbar. Ist $N \subseteq \mathbb{R}^n$ eine Jordan-Nullmenge mit $\overline{N} \subseteq G$, so ist auch $g(N) \subseteq \mathbb{R}^p$ eine Jordan-Nullmenge.

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)