Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Wintersemester 2008/09
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

7. Übungsblatt zur VL Analysis III

Substitutionsregel

Abgabe: 04.12.2008 **vor Beginn** der Übung

Dies ist das letzte Übungsblatt der ersten Semsterhälfte!

Übung

1. Aufgabe
Berechne das Volumen des Ellipsoids

$$E = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1 \right\} \quad (a, b, c > 0)$$

einmal mit Hilfe des Satzes von Fubini und einmal mit Hilfe der Substitutionsregel.

2. Aufgabe
Berechne das Volumen des sog. *Viviani-Körpers*

$$V = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq x \right\}.$$

3. Aufgabe
Berechne das Volumen eines Torus

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 \leq r^2 \right\}$$

mit grossem Radius $R > 0$ und kleinem Radius $0 < r < R$.

4. Aufgabe
Bestimme mit Hilfe des Satzes von Fubini und der Substitutionsregel den Wert des sog. *Gaußschen Fehlerintegrals*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \, \mathrm{d}x.$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (16 Punkte)

Berechne die folgenden Integrale und fertige jeweils eine Skizze des Integrationsbereichs an.

a) $\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} x^2(x^2+y^2)^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}x$.

b) $\int_K \sin\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$, wobei $K = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid \pi^2 \le x^2+y^2 \le 4\pi^2\}$.

c) $\int_L (x+y)\,\mathrm{d}(x,y)$, wobei $L = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le x+y\}$.

d) $\int_M e^{x^2+y^2}\,\mathrm{d}(x,y)$, wobei $M = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 1 \le x^2+y^2 \le 2,\ y \ge 0\}$.

e) $\int_N \frac{x+y}{x^2}\,\mathrm{d}(x,y)$, wobei $N = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid 0 < y \le x,\ 1 \le x+y \le 2\}$.
(Konstruiere hierzu eine geeignete Variablentransformation.)

2. Aufgabe (12 Punkte)

Sei $0 < a < 1$. Der Kreiszylinder $Z_a = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \le a^2\}$ bohrt aus der Kugel $K_3(1) = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \le 1\}$ einen Körper P aus. Fertige eine Skizze von P an und berechne dessen Volumen.

3. Aufgabe (12 Punkte)

Berechne das Volumen des Schnittkörpers zweier Kreiszylinder mit gleichem Radius $r > 0$ und sich senkrecht schneidenden Achsen und fertige eine Skizze des Schnittkörpers an.

Zusatzaufgabe (10 Punkte)

Seien $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}^n$ linear unabhängige Vektoren. Das von den Vektoren $a_1,\dots,a_n$ aufgespannte Parallelotop ist gegeben mittels

$$P(a_1,\dots,a_n) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_n a_n \mid \lambda_1,\dots\lambda_n \in [0,1]\}.$$

Zeige mithilfe der Substitutionsregel, dass das Volumen des Parallelotops gegeben ist durch

$$v_n(P(a_1,\dots,a_n)) = |\det(A)|, \quad \text{wobei } A = \big(a_1\,|\dots|\,a_n\big) \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

(Gesamtpunktzahl: 40+10 Punkte)