Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

Wintersemester 2008/09

8. Übungsblatt zur VL Analysis III

Satz von Gauss-Green, Flächeninhalte im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$

Abgabe: 11.12.2008 **vor Beginn** der Übung

Übung

1. Aufgabe

Spezial.

2. Aufgabe

Sei B der Bereich, der durch die Bögen der beiden Wege

$$\gamma_1,\, \gamma_2 : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma_1(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma_2(t) = \begin{pmatrix} -t \\ \cos(-t) \end{pmatrix}$$

berandet wird.

a) Bestimme den Flächeninhalt von B.

b) Betrachte weiterhin das Vektorfeld

$$F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad F(x, y) = \begin{pmatrix} x - y^2 \\ y - x^2 \end{pmatrix}$$

und verifiziere die Greensche Formel anhand von F und B.

3. Aufgabe

Sei $R > 0$ und $0 < r < R$. Berechne die Oberfläche

a) des Torus

$$T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \left(\sqrt{x^2 + y^2} - R\right)^2 + z^2 \leq r^2 \right\}.$$

b) der Kugel

$$K_3(R) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \right\}.$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

Bestimme den Flächeninhalt des Bereichs,

a) der durch den Bogen der Zykloide

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r(t-\sin t) \\ r(1-\cos t) \end{pmatrix}, \quad t \in [0, 2\pi]$$

und das Intervall $[0, 2\pi r]$ begrenzt wird ($r > 0$).

b) der von der Ellipse

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$

eingeschlossen wird.

2. Aufgabe (10 Punkte)

a) Berechne die Oberfläche des Körpers $P = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq a^2,\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$ mit $0 < a < 1$. *(2. Hausaufgabe vom 7. ÜB)*

b) Berechne die Oberfläche des hyperbolischen Paraboloids

$$P = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 - y^2 = 2z,\, x^2 + y^2 \leq R^2 \right\}.$$

c) Sei $r > 0$ und $-r \leq a < b \leq r$. Eine Kugelzone ist gegeben durch

$$K_{[a,b]} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\, z \in [a, b]\}.$$

Zeige, dass die Fläche der Kugelzone mit der Oberfläche eines Kreiszylinders mit Radius r und Höhe $h = b - a$ übereinstimmt.

3. Aufgabe (12 Punkte)

Beweise die folgende Aussage:

Ist $A \subseteq \mathbb{R}^2$ zerlegbar in mehrere BV-Normalbereiche bzgl. der x- und y-Achse, so gilt der Satz von Gauss-Green auch für A (auch wenn A selbst kein BV-Normalbereiche bzgl. der x- und y-Achse ist).

4. Aufgabe (12 Punkte)

Sei $u : M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion mit $\Delta u = 0$ im Inneren von M. Zeige, dass dann

$$\int_0^{2\pi} (\cos\varphi) \frac{\partial u}{\partial x}(\cos\varphi, \sin\varphi) + (\sin\varphi) \frac{\partial u}{\partial y}(\cos\varphi, \sin\varphi)\, \mathrm{d}\varphi = 0.$$

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)