Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

Wintersemester 2008/09

9. Übungsblatt zur VL Analysis III

Oberflächenintegrale, Satz von Stokes

Abgabe: 18.12.2008 **vor Beginn** der Übung

Analysis 3 - Weihnachtsumtrunk

Kurz bevor es in die wohlverdiente Weihnachtspause geht, wollen wir euch noch zu einem gemütlichen gemeinsamen Umtrunk einladen. Er findet statt am

Freitag, den 19. Dezember ab 18 Uhr im Mathe-Café (MA 844).

Getränke sind prinzipiell selbst mitzubringen oder mit Marken vom Mathe-Café zu erstehen. Kekse und Glühwein sind aus gegebenem Anlaß sehr willkommen und werden in begrenzter Menge auch von uns gestellt.

Übung

1. Aufgabe

a) Zeige: Wird ein Flächenstück durch die Gleichung $z = f(x, y)$ gegeben, so ist sein Flächeninhalt unter geeigneten Voraussetzungen über die Funktion f und ihren Definitionsbereich K (welche sind das?) gleich

$$\int_K \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, \mathrm{d}(x, y).$$

b) Sei $0 < \varepsilon < a, b$. Bestimme mit Hilfe von a) den Flächeninhalt F_ε desjenigen Teils der Fläche $z = \sqrt{2xy}$, der über dem Rechteck $[\varepsilon, a] \times [\varepsilon, b]$ liegt.

c) Berechne nun den Flächeninhalt F desjenigen Teils der Fläche $z = \sqrt{2xy}$, der über dem Rechteck $[0, a] \times [0, b]$ liegt durch $F = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon$.
Warum kann zur Bestimmung von F nicht unmittelbar a) angewendet werden?

2. Aufgabe

Berechne das Oberflächenintegral $\int_{S^+} x^2 + y^2 \,\mathrm{d}\sigma$, wobei S^+ die obere Hälfte der Oberfläche einer Kugel um den Nullpunkt mit Radius $r > 0$ ist, d.h. $S^+ = \big\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = r^2,\ z \geq 0\big\}$.

3. Aufgabe

Sei K die Kreisscheibe um den Nullpunkt mit Radius $a > 0$ und sei ein Flächenstück ϕ explizit durch die Gleichung $z = x^2 - y^2$ gegeben. Verifiziere den Satz von Stokes anhand von ϕ und des Vektorfeldes $F(x, y, z) = z\,\vec{i} + x\,\vec{j} + y\,\vec{k}$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar mit $f \geq 0$ auf $[a,b]$. Die Rotation des Bogens $\Gamma_f = \{f(x) \mid x \in [a,b]\}$ um das Intervall $[a,b]$ erzeugt eine *Rotationsfläche* mit der Darstellung

$$\phi : [a,b] \times [0,2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad \phi(u,v) = (u, f(u)\cos v, f(u)\sin v).$$

Zeige, dass der Flächeninhalt der Rotationsfläche gegeben ist durch

$$2\pi \int_a^b f(u)\sqrt{1 + (f'(u))^2}\,\mathrm{d}u.$$

Berechne mit Hilfe dessen die Mantelfläche eines Kegelstumpfes im $\mathbb{R}^3$ mit Höhe $h > 0$, Radius $r > 0$ der kleineren und Radius $R > r$ der grösseren Grundfläche.

2. Aufgabe (14 Punkte)

Berechne die folgenden Oberflächenintegrale:

a)

$$\int_E \sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}\,\mathrm{d}\sigma \quad \text{mit } E = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\} \ (a,b,c > 0).$$

b)

$$\int_S x\,\mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y \quad \text{mit } S = \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \right\} \ (r > 0).$$

c)

$$\int_S F\,\vec{\eta}\,\mathrm{d}\sigma, \quad \text{wobei } S = \phi([0,1] \times [0,2\pi]) \text{ mit } \phi(u,v) = u\cos v\,\vec{i} + u\sin v\,\vec{j} + v\,\vec{k}$$
$$\text{und } F(x,y,z) = y\,\vec{i} - x\,\vec{j}.$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

Sei S^+ die obere Hälfte der Oberfläche der Einheitskugel, parametrisiert durch

$$\phi(u,v) = \cos u \cos v\,\vec{i} + \sin u \cos v\,\vec{j} + \sin v\,\vec{k}, \quad u \in [0,2\pi],\ v \in [0,\pi/2].$$

Berechne für das Vektorfeld $F(x,y,z) = \vec{i} + xz\,\vec{j} + xy\,\vec{k}$ das Oberflächenintegral $\int_{S^+} \operatorname{rot} F\,\vec{\eta}\,\mathrm{d}\sigma$ einmal mit Hilfe des Satzes von Stokes und einmal direkt und vergleiche den Aufwand.

4. Aufgabe (10 Punkte)

Zeige, dass unter gewissen zusätzlichen Voraussetzungen (welche sind das?) der Satz von Gauss-Green aus dem Satz von Stokes folgt.

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)