Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

Wintersemester 2008/09

10. Übungsblatt zur VL Analysis III

Gaußscher Integralsatz im $\mathbb{R}^3$

Abgabe: 08.01.2009 **vor Beginn** der Übung

Das Analysis3-Team wünscht euch allen frohe Weihnachten und einen guten Rutsch!

Übung

1. Aufgabe

Berechne mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes die folgenden Integrale:

a)
$$\int_S (4xz\,\vec{i} - y^2\,\vec{j} + yz\,\vec{k}) \cdot \vec{\eta}\,\mathrm{d}\sigma,$$
wobei S die Oberfläche des Würfels $[0,1]^3$ ist.

b)
$$\int_S (x^3\,\vec{i} + y^3\,\vec{j} + z^3\,\vec{k}) \cdot \vec{\eta}\,\mathrm{d}\sigma,$$
wobei S die Oberfläche der Kugel mit Radius $R > 0$ um den Nullpunkt ist.

2. Aufgabe

Sei S die Oberfläche des Körpers

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 4,\, 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\right\}$$

und F ein Vektorfeld, gegeben durch $F(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$.

a) Skizziere V und zeige, dass V ein C^1-Normalbereich bzgl. aller Koordinatenebenen ist.

b) Berechne das Integral $\int_S F \cdot \vec{\eta}\,\mathrm{d}\sigma$ einmal direkt und einmal mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

3. Aufgabe

Wiederholung

Hausaufgaben

1. Aufgabe (10 Punkte)
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen und $V \subseteq G$ ein C^1-Normalbereich bzgl. aller Koordinatenebenen. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Ist $v \in C^2(G)$ *harmonisch*, d.h. es ist $\Delta v = 0$ auf G, so gilt

$$\int_{\partial V} D_{\vec{\eta}} v \, \mathrm{d}\sigma = 0 \quad \text{und} \quad \int_{\partial V} v \, D_{\vec{\eta}} v \, \mathrm{d}\sigma = \int_V \|\nabla v\|^2 \, \mathrm{d}(x,y,z).$$

b) Ist $f \in C^2(G)$ und $F : G \to \mathbb{R}^3$ ein C^1-Gradientenfeld, so gilt

$$\int_{\partial V} f(F \cdot \vec{\eta}) \, \mathrm{d}\sigma = \int_V (\nabla f \cdot F + f \operatorname{div} F) \, \mathrm{d}(x,y,z).$$

2. Aufgabe (6 Punkte)
Sei S die Oberfläche der Kugel mit Radius $R > 0$ um den Nullpunkt. Berechne das Oberflächenintegral

$$\int_S x \, \mathrm{d}y \wedge \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \wedge \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$$

mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes und vergleiche den Aufwand zur direkten Berechnung wie in Hausaufgabe 2 b) vom 9. Übungsblatt.

3. Aufgabe (12 Punkte)
Sei S die Oberfläche des Körpers

$$V = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq 9,\ 0 \leq z \leq 5\right\}$$

und F ein Vektorfeld, gegeben durch $F(x,y,z) = (x+y, y+z, x+z)$.

a) Skizziere V und zeige, dass V ein C^1-Normalbereich bzgl. aller Koordinatenebenen ist.

b) Berechne das Integral $\int_S F \cdot \vec{\eta} \, \mathrm{d}\sigma$ einmal direkt und einmal mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes.

4. Aufgabe (12 Punkte)
Eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Teilmengen $\emptyset \neq A_n \subseteq \mathbb{R}^3$ heisst *konvergent* gegen einen Punkt $p \in \mathbb{R}^3$, falls gilt:

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} : \quad A_n \subseteq B_\varepsilon(p) = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \|x - p\| < \varepsilon\} \quad \text{für } n \geq n_0.$$

Beweise die folgende Aussage:
Sei $G \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $x \in G$ und $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen x konvergente Folge von nicht-leeren Quadern in G. Ist F ein C^1-Vektorfeld auf G, so lässt sich die Divergenz von F wie folgt durch die sog. *Volumenableitung* ausdrücken:

$$\operatorname{div} F(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\operatorname{vol}(Q_n)} \int_{\partial Q_n} F \cdot \vec{\eta} \, \mathrm{d}\sigma.$$

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)