Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/WS08/Analysis3/

Wintersemester 2008/09

11. Übungsblatt zur VL Analysis III

σ-Algebren, Inhalte und Maße

Abgabe: 15.01.2009 **vor Beginn** der Übung

Übung

1. Aufgabe
kurze Wiederholung: Integrationstheorie im $\mathbb{R}^n$

2. Aufgabe
Sei $S \neq \emptyset$ eine Menge und $E \subseteq S$. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Für alle $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(S)$ gilt $\sigma(\mathcal{E} \cap E) = \sigma(\mathcal{E}) \cap E$.

b) Ist $S = \mathbb{R}^N$, so wird $\mathcal{B}_0(E)$ von den relativ halboffenen Teilmengen von E erzeugt.

c) Ist $S = \mathbb{R}^N$ eine Borelmenge, dann gilt $\mathcal{B}_0(E) = \{A \in B_0(\mathbb{R}^N) \mid A \subseteq E\}$.

d) Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf S, so ist die Spur $\mathcal{A} \cap E$ eine σ-Algebra auf E.

3. Aufgabe
Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$ und $\mu(A) < \infty$ gilt

$$\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A).$$

b) Für beliebige $A, B \in \mathcal{A}$ mit $\mu(A) < \infty$ oder $\mu(B) < \infty$ gilt

$$|\mu(B) - \mu(A)| \leq \mu(A \triangle B).$$

*H*ierbei bezeichne $\triangle$ die symmetrische Differenz $A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (10 Punkte)
Sei $S \neq \emptyset$ eine Menge und $Z = \{A_1, A_2, A_3, \ldots\}$ eine abzählbare Zerlegung von S in paarweise disjunkte Mengen, d.h. $S = \dot{\bigcup}_{i \in \mathbb{N}} A_i$. Beweise die folgenden Aussagen:

a) $\mathcal{A} = \left\{ \bigcup_{i \in J} A_i \mid J \subseteq \mathbb{N} \right\}$ ist eine σ-Algebra auf S.

b) Es ist $\sigma(Z) = \mathcal{A}$.

2. Aufgabe (8 Punkte)
Beweise die folgenden Aussagen:

a) Die Vereinigung zweier σ-Algebren auf einer Menge $S \neq \emptyset$ ist i. A. keine σ-Algebra auf S.

b) Ist $A \subseteq \mathbb{R}^N$ eine Borelmenge und $\alpha > 0$, so ist auch $\alpha A = \{\alpha x \mid x \in A\}$ eine Borelmenge.

3. Aufgabe (10 Punkte)
Zeige, dass auf $\mathcal{F}^1$ *genau* ein Inhalt μ existiert, welcher den nach links halboffenen Intervallen $(a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$, folgende Werte zuordnet:

$$\mu\left((a, b]\right) = \begin{cases} 1 & \text{falls } a \leq 0 < b, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Ist μ σ-additiv?

4. Aufgabe (12 Punkte)
Sei $(S, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum. Für $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{P}(S)$ (d.h. für $A_1, A_2, \ldots \subseteq S$) definiere

$$\limsup A_n = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{i=k}^{\infty} A_i.$$

Beweise die folgenden Aussagen:

a) $\limsup A_n$ besteht aus allen $s \in S$, die zu unendlich vielen der A_n gehören.

b) Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$, so ist auch $\limsup A_n \in \mathcal{A}$.

c) Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{A}$ und gilt $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < \infty$, so ist $\mu(\limsup A_n) = 0$.

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)